MAGYAR PEDAGÓGIA
101. évf. 1. szám 5–45. (2001)

A NYELVI ÉS STRUKTURÁLIS TÉNYEZŐK BEFOLYÁSA A SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

Kontra József
Kaposvári Egyetem, Csokonai Vitéz Mihály Pedagógiai Főiskolai Kar, Pedagógiai Tanszék

René Descartes (1596–1650) „Szabályai”-ban a problémamegoldás egyetemes módszerét kívánta bemutatni. Noha *Descartes* elgondolása nem válik be mindig, számos *fontos* esetben használható. Ezt az eljárást követi egy tanuló, ha „egyenletek felállításával” old meg egy „szöveges feladatot”, és ezzel mintegy felkészül az abban rejlő gondolat komolyabb alkalmazására is (*Pólya*, 1979). A „szöveges egyenletek” tehát joggal szerepelnek a tananyagban (*Hajnal* és *Némethy*, 1989). [1]

Ugyanakkor tudnunk kell, hogy a matematikaórán elsajátított ismeretek nehezen transzferálhatók olyan feladatokra is, amelyek – jóllehet a tanórai típusoktól valamelyest eltérnek – megmaradnak a matematika keretei között (*Novick*, 1992; *Csapó* és *Korom*, 1998). Másrészt a sokféle kapcsolat keresésére egységes instrukció nem fogalmazható meg. A gyakorlat azt mutatja, az *iskolai szöveges feladatok* általában a nehezebb problémák közé tartoznak (*Mosonyi*, 1972; *Báthory*, 1989; *Majoros*, 1992; *Karácsony*, 1994). Megjegyezzük, hogy 1997-ben országos reprezentatív mintákon végzett mérések adatai szerint a szöveges feladatok megoldásában a tanulók átlagos teljesítményei lényegesen jobbak voltak, mint a korábbi, 1972-ben mért teljesítmények (*Vidákovich* és *Csapó*, 1998). Egyszersmind megfigyelhető volt, hogy a szöveges matematikai feladatmegoldó készségek az iskolai pályafutás során végig fejlődnek, habár kiderült az is, hogy a tanulók egy részénél e készségek teljesítményei még a 10. évfolyamon sem érik el az eszközszerű használathoz szükséges szintet (*Halász*, 2000).

Éppen ezért szaktanári szempontból ugyanúgy tanulságos végiggondolni, hogy *miért bizonyul többnyire nehéznek az egyik, s feltűnően könnyűnek a másik feladat.* Ilyenkor gondolhatunk feladatszerkesztési hibákra is. Például a bonyolult szöveg megakadályozhatja a tanulót abban, hogy a feladatot megértse, és a matematikai megoldást megadja (*Csapó*, 1993). A teljes képhez hozzátartozik, hogy a tankönyvek súlyos tévedéseket tartalmazhatnak: a „vírusos” részeket az olvasó nem érti (nem értheti) (*Kósa*, 1994).

[1] *Hajnal* és *Némethy* a „szöveges egyenleteket” azzal indokolja, hogy a mindennapi életből vett megfigyelések (mérések) alapján matematikai összefüggéseket kell felismerni, azaz megfelelő matematikai modellt kell keresni és felírni (1989. 90. o.). Könyvükben később pedig megemlítik, hogy az úgynevezett „szöveges feladatoknál” (így, idézőjelben) még az ismeretlenek megválasztása is befolyásolhatja a megoldás munkájának a mennyiségét (1989. 163. o.).

Vizsgálatunkban a teljesítmények szempontjából a problémák (esetünkben „mozgási” feladatok) *Lepik* (1990) nyomán meghatározott paramétereivel foglalkozunk. Adataink lehetővé teszik, hogy a feladatok megbízhatóságát is tanulmányozzuk. A felmérésbe bevont 9. osztályosok összlétszáma 630 fő volt.

Szöveges feladatok olvasása és megértése

Visszatérő tanári panasz, hogy azok a tanulók, akik képesek aritmetikai feladatok sikeres megválaszolására, gyakorta eredménytelenek olyan szöveges problémák megoldásában, amelyekhez ugyanazon alapvető számítási műveletek végrehajtása szükséges. Talán nem is kell külön hangsúlyozni, más *észjárás* feltételezhető a szöveges matematikai problémák megoldásakor, mint amikor a tanulók egyenletekkel találkoznak (ld. *egyszerűsítő stratégia* »reduce strategy« vs. *elkülönítő stratégia* »isolate strategy«; *Mayer*, 1982). Bevezető áttekintésünk tehát elsősorban arról szól, mit is jelent „egy adott szöveges feladat lefordítása az algebra nyelvére”. Mely kognitív folyamatok alkotják a matematikai problémamegoldás alapjait? Mit tudnak a *szöveges egyenletek* eredményes megoldói? Ezen az úton el kell jutnunk a másik megközelítéshez, amely a feladatok jellemzőit teszi vizsgálat tárgyává. Ez pedig visszavezet a szöveges problémák megoldásbeli nehézségeinek alapvető forrásaihoz, a feladatok értelmezéséhez és megértéséhez.

A matematikai problémamegoldás kognitív folyamatai

Alkalmas kiindulásként megadjuk – *Mayer* felfogásához csatlakozva – a matematikai problémamegoldás négy fő összetevőjét (*Mayer*, *Larkin* és *Kadane*, 1984; *Mayer*, *Lewis* és *Hegarty*, 1992; *Mayer* és *Hegarty*, 1998): transzláció, integrálás, tervezés és végrehajtás. A *transzlációs folyamatban* a megoldó a problémában szereplő minden egyes kijelentés belső mentális reprezentálásán tevékenykedik. Az *integrálás* a releváns információk beépülését foglalja magában egy koherens mentális reprezentációba. A *tervezés* a probléma megoldásának megszerkesztését jelenti. (A tervezés és a tudatos áttekintés: a metakognitív megközelítés – *Fisher*, 1999.) A *végrehajtás* pedig a terv kivitelezése. Az 1. táblázatban közölt példa segítheti a pedagógusokat a relatíve gyengébben teljesítő tanulók metakognitív tudatosságának fejlesztésében (*Cardelle* és *Elawar*, 1994).

Mayer és *Hegarty* (1998) kutatásai szerint a teljesítés akadályainak oka inkább a *problémák reprezentálásában* van, mint a megoldási eljárás végrehajtásában. A szerzők *direkt* vagy *közvetlen transzlációs stratégiának* nevezik azt az eljárást, amikor az integrálási folyamatban a megoldó tartalmilag kivonatolja (kiragadja) azokat a számokat és kulcskifejezéseket, amelyek a végrehajtáshoz az aritmetikai műveleteket megalapozzák.

Természetesen gyakran előfordul, hogy a „kulcsszavak” nem megfelelő műveleteket sejtetnek, vagyis a pusztán *szavakra* (felszínre) épített megoldási terv nagy valószínűséggel helytelen. Drámai példával szolgál ehhez *Reusser* (*Bransford*, *Zech*, *Schwartz*, *Barron* és *Vye*, 1998). Feladata a következő volt: Egy hajón 26 bárány és 10 kecske van. Hány éves a kapitány? A tanulóknak mintegy 3/4-e megpróbálta (mechanikusan) kiszámítani a választ! Egy ötödik osztályos gyerek megoldása: 26 + 10 = 36 (*Bransford* és *Stein*, 1993).

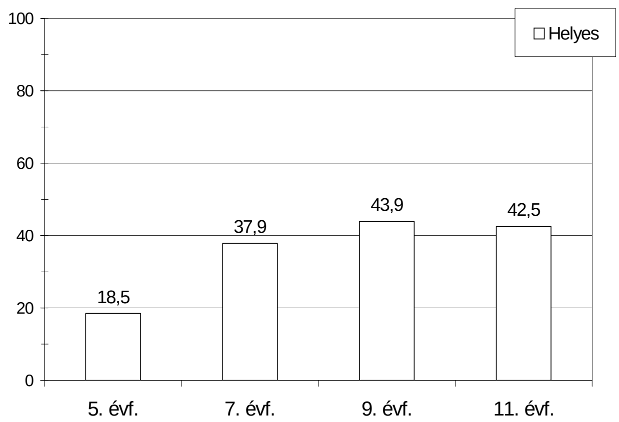
1. táblázat. Egy probléma megoldása Mayer modellje nyomán (ld. Cardelle–Elawar, 1994)

Feladat: Mennyibe kerül egy 16,5 m hosszú és 12,7 m széles terem parkettaanyaga, ha 1 dm^2 parketta ára 50,50 Ft?

Fázis	**Szükséges tudás**	*Példa*
Transzláció	Milyen alakzat a terem?	A terem téglalap. *(Nyelvi információ)*
	Hány dm^2 1 m^2?	1 m^2 = 100 dm^2 *(Tárgyi tudás)*
Integrálás	Mekkora a téglalap területe?	A terület a hosszúság és a szélesség szorzata. *(Séma-előzetes tudás)*
Tervezés	Melyek a *megoldás lépései* (procedural steps)?	1. A téglalap területének kiszámítása (hosszúság · szélesség). 2. Átszámítás: Hány dm^2 parketta szükséges? 3. A költség meghatározása a parketta egységárával. *(Stratégiai tudás)*
Végrehajtás	Hogyan kell számolni a tizedes törtekkel? Hová kell tenni a szorzatban a tizedesvesszőt?	1. 16,5 m · 12,7 m = ___ m^2 2. ___ $m^2 \Rightarrow$ ___ dm^2 3. ___ dm^2 · 50,50 Ft/dm^2 = ___ Ft *(Aritmetikai számítások)*

Hasonlóképpen érdekes eredményeket kaptunk a „zokni–probléma" esetén: A fiókban a fekete és a barna zoknik 4:5 arányban vannak keverve. Hány zoknit kell kihúznod ahhoz, hogy biztosan legyen egy azonos színű párod? (Megoldás: hármat.) A direkt fordításos módszer a 4 és 5 számokat kínálja, és ekként hibához vezethet, hiszen a megoldás tekintetében az aránypár lényegtelen (*Sternberg*, 1998). A feladatot általános iskolásoknak (5. osztály: 135 fő, 7. osztály: 232 fő; ld. *Kontra*, 1999) és középiskolásoknak (ebben a tanulmányban szerepet kapó iskolákból: a 9. évfolyamon 73 gimnazistának és 123 szakközépiskolásnak, továbbá a 11. évfolyamon 59 gimnazistának és 101 szakközépiskolásnak) adtuk fel. A válaszok évfolyamonkénti százalékos eloszlását az *1. ábra* mutatja. Látható, hogy a feladaton nyújtott teljesítmények 44% alattiak. Az ötödikesek teljesítménye (18,5%) lényegesen gyengébbnek bizonyult, mint a másik három korcsoporté: Mann–Whitney-próbával mindhárom összehasonlítás eredményeként $p < 0{,}001$ adódott. A hetedikes, a kilencedikes és a tizenegyedikes tanulók (37–44% közötti) eredményessége a Kruskal–Wallis-próba alapján (az egyszempontos varianciaanalízis alkalmazását a varianciák jelentős különbsége nem tette lehetővé) számottevően nem különbözik ($p > 0,05$).

A fentiekkel együttvéve elgondolkodtató más elemzések tanulsága, hogy bár hazánkban az oktatás nagymértékben hozzájárul a tanulók pontatlan, naiv elképzeléseinek kijavításához (tegyük hozzá, óriási mennyiségű tantárgyi tudást követel meg), még a középiskolás kor vége felé is jelentős a megtanult, de meg nem értett vagy félreértelmezett ismeretek aránya. A tanulók tudása módfelett kontextusfüggő, voltaképp csak azt tudják, amivel előbb a tanórán adott formában találkoztak (*B. Németh*, 1998; *Csapó* és *Korom*, 1998; *Dobi*, 1998).



1. ábra
A „zokni–probléma” megoldásainak aránya évfolyamonkénti bontásban (%)

Úgy tűnik, iskolai tanulmányaik révén a tanulók rendelkezhetnek megfelelő feladatvégrehajtási képességekkel (használják a jól begyakorolt aritmetikai és algebrai eljárásokat), ámde bizonyos gondolkodási – egyebek között a problémareprezentációs – képességeik fejletlenek. Döntő képesség például: (1) az a képesség, hogy a problémaszituáció kvalitatív megértésén alapuló megoldási tervet kialakítsuk (a szükséges számításokat megtervezzük), (2) az a képesség, hogy a problémában leírt helyzetet (sematikus) ábrákkal reprezentáljuk, (3) az a képesség, hogy az információkat megfelelően szervezzük, a *sémákat* (schemata) kezeljük, valamint (4) az a képesség, hogy analógiákat állítsunk fel (*Schultz*, és *Lochhead*, 1991; *Dreyfus* és *Eisenberg*, 1998; *Skemp*, 1975). Ezekhez még hozzávehetők a metakognitív képességek (*Graeber*, 1994; *Fisher*, 1999).

Egyébiránt számolni kell azzal, hogy a kevésbé sikeres problémamegoldók módszere alighanem a közvetlen transzlációs stratégia. Ezzel összefüggésben utalnunk kell arra, hogy a *problémamodellező megközelítés* ugyanazt a transzlációs eljárást tartalmazza, de egy eltérő integrálási folyamatban a problémamegoldó a problémában leírt szituáció modelljének értelmi megszerkesztésére törekszik. Az így kapott megoldási terv feltehetően helyes, még ha a kulcskifejezések nem helyénvaló műveleteket sugalmaznak is. E szemlélettel a megoldási terv végrehajtása a probléma reprezentációjának természetes folyománya (*Mayer* és *Hegarty*, 1998). Jól tudjuk a köznapi tanári tapasztalatokból, hogy a feladatmegoldás kulcslépése a feladat szövegének pontos megértése és az adatok helyes kigyűjtése. Persze fel lehet vetni, hogy a mértékváltás, a rejtett adatok kiszámítása újabb nehézségeket jelenthet. Aki ezeket a lépéseket sikeresen végzi el, már általában könynyebben boldogul a megoldás további lépéseivel (*Vidákovich* és *Csapó*, 1998).

Az eddigiekből az a kép bontakozik ki, hogy a *jó tanulók*, akik általában jól oldanak meg matematikai feladatokat, a problémákról szélesebb vagy más reprezentációt képesek kialakítani, így beszélhetünk a problémák megfelelő reprezentálásáról (megértéséről), s metakogníciójuk is valószínűleg fejlettebb (*Kontra*, 1999). Összhangban a problémamegoldás klasszikus elméleteivel mondhatjuk, hogy a szöveges feladatok megoldásának legkreatívabb mozzanata a probléma jelentésének felismeréséhez kapcsolódik. Említsük itt meg, hogy hazánkban az általános iskolás életkorban a „jobb képességekkel” rendelkező gyerekek jobb jegyeket kapnak, *a középiskolában viszont a kevésbé jó képességű tanulók is szerezhetnek jó osztályzatokat, és a jó gondolkodási képességűek sem mindig jó tanulók* (*Csapó*, 1998; *Kontra*, 2000).

A feladatmegértés segítése: a szöveges feladatok felosztásai

Most értünk ahhoz a kérdéskörhöz, hogyan hatnak a problémák sajátságos jellegzetességei a megoldásmintára. Kissé gyakorlatiasabban a direkt transzlációs stratégiát úgy jellemezhetnénk, hogy – bár gyakran vezet helytelen eredményre – *előnye* a minimális memóriaigény, továbbá a problématípusok ismeretétől való függetlenség (*Mayer* és *Hegarty*, 1998). Mindazonáltal problémákkal szembekerülve a megoldók többször használják hasonló problémák megoldása során nyert tapasztalataikat. Fontos körülmény azonban, hogy a *kezdők* hajlamosabbak olyan hibákat véteni, amelyek a forrás- és célproblémák közötti felszíni-strukturális hasonlóságokon alapulnak, míg a *tapasztaltabbak* (haladók) jobban ügyelnek a mély-strukturális motívumokra (*Novick*, 1992; *Ben-Zeev*, 1998).

Valóban, például a matematika (szöveges feladatok) (*Hinsley*, *Hayes* és *Simon*, 1977), valamint a fizika (*Chi*, *Feltovich* és *Glaser*, 1981) területén empirikusan feltárták, hogy a problémamegoldók a problémákat típusokba sorolják. A problémaosztályokhoz kapcsolódó tudás az úgynevezett *problématípus-séma* (problem-type schemata), amelyben visszatükröződnek a releváns fogalmak, elvek, szabályok, eljárások, relációk, műveletek stb. (*Anderson* és *Thompson*, 1989; *Ross* és *Kennedy*, 1990; *Greeno*, 1991; *Novick* és *Holyoak*, 1991). Ajánlatos tehát, hogy a tanulók *lényegesen* különböző problémákkal találkozzanak. Ez a kérdés átvezet a problémák osztályozásának témájába (*Kontra*, 1996).

Az a gondolat, hogy „nagyon sokféle” feladatot kell megoldanunk, a középiskolai matematikaoktatásban ismerős. Jó példa erre *Hajnal* és *Némethy* (1989) álláspontja, amely szerint kiragadhatunk egy-egy típusú problémakört, például „*mozgási*”, vagy „*munkavégzési*”, vagy „*keverési*” feladatokat, de ha kizárólag ilyeneket tárgyalunk, tanítványaink nem veszik észre a matematikai modellalkotás „érdekességét és szépségét". Kérdés persze, hogy milyen típusú problémakörök közül választhatunk.

A többféle megközelítés, felosztás közül a következőkben azokat tekintjük át, amelyek pedagógiai nézőpontból szerintünk a leginkább tanulságosnak ígérkeznek. Alapos elemzésre azonban nem vállalkozhatunk, csupán néhány fontosabb mozzanatot emelünk ki. Miközben a matematikai szöveges feladatok főbb rendezési elveivel foglalkozunk, érintjük a tanulók gondolkodásának néhány, a szempontokhoz kapcsolódó jellemzőjét is.

Hazai példák

Elsőként két (tipikus) felosztást mutatunk be. Az egyikben *Bíró* (1979) a szöveges feladatokat a következőképpen foglalta össze: (1) aritmetikai jellegű egyenletek, (2) részek számításával kapcsolatos egyenletek, (3) százalékszámítással kapcsolatos egyenletek, (4) geometriai tárgyú egyenletek, (5) fizikai tartalmú egyenletek (teljesítményhez, mozgásokhoz, fajsúlyhoz meg egyéb fizikai alapfogalmakhoz kapcsolódó egyenletek) és (6) grafikus módszerrel megoldható egyenletek. (Megjegyzendő, hogy *Bíró* az elsőfokú és a másodfokú egyenletek típuscsoportjait külön alfejezetekben adja meg. A másodfokú egyenletekre vonatkozó tagolásban az aritmetikai és a részek számításával kapcsolatos egyenletek közösen, azaz egy típuscsoportban szerepelnek.) A másik osztályozás *Gyetván* és *Varga* (1992) alapjában hasonló, de két feladatcsoport esetében az a feladatunk, hogy „a megadott egyenletet megoldjuk", míg a többi feladatokban „nincs megadva konkrétan az egyenlet, hanem szövegbe rejtve": (1) aritmetikai jellegű (konkrétan megadott) egyenletek, (2) részek számításával kapcsolatos (szövegbe rejtett) egyenletek, (3) százalékszámítással kapcsolatos (szövegbe rejtett) egyenletek és (4) geometriai tárgyú (szövegbe rejtett) egyenletek, valamint (5) grafikus módszerrel megoldható (konkrétan megadott) egyenletek. (Most is elkülönítve olvashatunk az elsőfokú és a másodfokú egyenletekről. Itt azonban a másodfokú egyenletre vezető feladatok esetében a százalékszámítással és a részek számításával kapcsolatos egyenletek vannak együtt.)

Ami e két felosztás összefonódását illeti, utalnunk kell a kategóriák tág értelmezésére. Például *Gyetván* és *Varga* (1992) könyvében *a részek számításával kapcsolatos egyenletek* csoportjában levő feladatok közül néhányat az első csoportosításban az *aritmetikai jellegű egyenletek* közé sorolhatnánk. Példa (elsőfokú egyenlet): „Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 10. Ha a jegyeit felcseréljük, 36-tal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?" (46. o.) Amellett együttes munkára vonatkozó feladat fellelhető *a fizikai tartalmú* (*Bíró*, 1979) és *a részek számításával kapcsolatos egyenleteknél* (*Gyetván* és *Varga*, 1992). A dolgot tovább bonyolítja a *kémiai tárgyú*, úgynevezett keverési feladatok besorolása. Igaz, a keverési feladatok egy része nem kémiai, hanem *fizikai jellegű* (*Mosonyi*, 1972). Ugyanakkor a keverési feladatokat mindkét rendszerben a *százalékszámítással kapcsolatos egyenleteknél* találjuk meg.

Nyilvánvaló, hogy a százalékszámítással kapcsolatos egyenletek külön kategóriaként történő kiemelése nehezíti az osztályozást. Ugyanis számos feladatot könnyen átfogalmazhatunk úgy, hogy a módosítás után már a százalékszámítással kapcsolatos egyenletekhez is tartozhatna. Vegyünk egy példát a részek számításával kapcsolatos egyenletek közül: Egy láda üdítőital *súlyának* harmadrésze az üvegek *súlya*, negyedrésze pedig a láda *súlya*. Határozza meg a láda üdítőital *súlyát*, ha az üdítőital *súlya 10 kp*! (*Gyetván* és *Varga*, 1992. 43. o.) A módosított feladat: Egy láda üdítőital tömegének 33%-a az üvegek tömege, 25%-a pedig a láda tömege. Határozza meg a láda üdítőital tömegét, ha az üdítőital tömege 10 kg! (Előfordulhat, hogy a testnek nem a tömegét, hanem a rá ható nehézségi erőt kívánjuk hangsúlyozni. Ekkor a súly – helyesebben a súlyerő – szót használjuk. A megértés-segítés problémájához tartozik, hogy ehhez ismeretre van szükség a fogalomról. De vajon a tanuló tud(hat)ja-e, mit jelent az, hogy „az üdítőital súlya 10 kp”? (A nemzetközi mértékegység-rendszerről, az SI alkalmazásának hazai elrendeléséről ld. *Csengeri* könyvét, 1981.)

A grafikus módszerrel megoldható egyenletek kapcsán alapjában véve hasonló mondható el. Itt a típusfeladatok között „mozgási” feladatokat (fizikai tartalmú egyenleteket) találunk (*Bíró*, 1979). Valóban, ezeknél *a grafikus eljárás* igen előnyös (egyebek között szemléletes) szokott lenni (*Baranyi*, 1992). *Hanem ez a fogás elvileg bármely egyismeretlenes egyenlet (és némely kétismeretlenes és egyéb egyenlet) megoldásánál igénybe vehető*. Tudjuk persze, hátránya az a pontatlanság, ami a függvényképek megrajzolásával meg a közös pontok *x* koordinátáinak a leolvasásával jár. Ez okból *más megoldási módszer keresése is ajánlatos* (*Hajnal* és *Némethy*, 1992). Amit javasolhatunk az az, hogy a középiskolai tanulók számára elhatárolható *a lineáris programozási feladatoknak* egy nagyon speciális – a grafikus módszerrel megoldható – esete (lásd *Hajnal*, *Nemetz*, *Pintér* és *Urbán*, 1982; *Kaufmann*, 1982; *Czapáry*, 1986; *Fülekiné*, 1996).

Megpróbáltuk érzékeltetni, hogy a matematikai szöveges feladatok bemutatott kétféle tagolása (a tankönyvekben és a feladatgyűjteményekben többnyire hasonlók találhatók) bizonytalan. Vannak ugyan (*tartalom* szerint) körülhatárolható témák – (a) a geometriai tárgyú egyenletek, (b) a sűrűséghez („keveréses feladatok”), (c) a mozgásokhoz, (d) a teljesítményhez (például „együttes munka”, „vízcsapos feladatok”) kapcsolódó egyenletek, valamint (e) számok meghatározására utaló (például helyi értékes egyenletek) (*Mosonyi*, 1972; *Dezső* és *Édes*, 1997) –, de a többi feladat idézett szétválasztásáról az álláspontunk negatív.

Első közelítésben azt mondhatjuk, hogy *felesleges* egy-két *nehezen megragadható* csoport (aritmetikai és részek számításával kapcsolatos egyenletek) képzésével bővíteni a *közismert* típusú problémaköröket (a, b, …, e). E tekintetben támaszkodhatunk az *áttekinthetőség alapelvére*, és a többieknek az „egyéb” (reziduális) kategóriát nyithatjuk meg (*Nagy*, 1985). Valójában éppen a *sokféle* feladat előfordulása miatt az *egyéb* kategória *ilyenforma finomítása* (újabb feladatcsoportok megadása) az iskolai gyakorlatban nem látszik indokoltnak. Az a *nem sok* probléma, amelyekkel a matematikaórákon – ebben a témakörben – foglalkozhatunk, *végtelenül változatos* lehet. Nézzük konkrét példákon: (1) „A labdarúgó-bajnokság őszi és tavaszi fordulójában összesen 306 mérkőzést játszottak a csapatok. Hány csapat mérkőzött?” (2) „Hárman 21 hordót kaptak. Ezek közül 7 félig, 7 egészen tele van borral, 7 pedig üres. Hogyan kell osztozkodniuk, hogy a bornak az összekeverése és átöntése nélkül mindenki 7 hordót és egyenlő mennyiségű bort kapjon?” (3) „Egy fiúnak ugyanannyi leánytestvére van, mint fiútestvére. Leánytestvérének feleannyi leánytestvére van, mint fiútestvére. Hány fiú és hány leány van a családban?” (*Gimesné*, 2000). Végül pedig fontos, hogy – e rendszerből kiindulva – a *tartalom* dimenziótól elkülönítve kezelhető a *grafikus módszer* alkalmazása meg a *százalékszámítás* ismeretének a követelménye.

Az elmondottak természetesen nem jelentik azt, hogy nem törekedhetünk a (tartalmilag) *összetartozók* kisebb csoportokba való foglalására. (Teljességre törekedni a tárgykör kimerítésében reménytelen vállalkozás.) Tekintsünk egypár jellegzetes esetet: életkorral (*Kosztolányi*, *Mike*, *Palánkainé*, *Szederkényiné* és *Vincze*, 2000), eladással/vásárlással, szállítással, és pénzösszeg felosztásával, kapcsolatos egyenletek stb. *Ilyenfajta összefoglalás hasznos lehet a témakör teljes megvilágítása és a rögzítés érdekében.* További megerősítést jelent, ha az összekötő szálakat is egybegyűjtjük, tudatosítjuk. Az *alkalmazhatóságot*, *használhatóságot* példák segítségével ellenőrizhetjük. Mégis komoly kérdések merülnek fel.

A feladat struktúrájának szerepe

Hinsley, *Hayes* és *Simon* (1977: idézi *Ben-Zeev,* 1998) megmutatták, hogy a matematikai problémákat középiskolások és főiskolai hallgatók az első egynéhány szó alapján képesek különböző típusokba rendezni. Például, az „Egy folyami gőzös…” kezdetű problémák „a folyó” problémaosztály visszakeresésére adtak utasítást. A problémák sajátságos jellegzetességei lényegében egy sokkal általánosabb megoldásmintára utasítottak. Pedagógiai szempontból nem mellőzhető, hogy a nagy gyakoriságú problémák több jól képzett sémával kapcsolódhatnak. E kontextusban megjelenhet egy alapvető komplikáció: a helytelen kategorizálás (a nem megfelelő séma felhasználása) hibás teljesítményhez vezethet *(Mayer*, 1984). *Hinsley* és munkatársai úgy találták, hogy egy probléma „becsaphat” egy tanulót, ha a tartalma egy bizonyos sémára utal (például háromszög), de valójában különböző típusú (például út–sebesség–idő). Ezek után azt mondhatjuk, hogy a hétköznapian használt (alkalmasint feladatgyűjteményekben fellelhető) kategóriák meglehetősen *felszínes* és egyoldalú osztályozásból származnak.

Kimondva-kimondatlanul biztosítani kell, hogy a tanulók *egységben* lássák a matematikát. Induljunk ki a következő feladatból. „A gépírónőnek 120 oldalt kellett legépelnie. Ha óránként 2 oldallal többet írt volna le, akkor két órával hamarabb lett volna készen. Hány óra alatt írta le a szöveget a gépírónő?” (*Gimesné*, 2000) Tegyük most fel, hogy feladatunk ekképp módosul: Egy turista 120 km utat tett meg, mindennap ugyanannyit haladva. Ha naponta 2 km-rel többet tett volna meg, akkor két nappal előbb ért volna az út végére. Hány nap alatt tette meg az utat a turista? Logikusnak látszik, ha egy tanuló tudja, hogyan használja az *út = sebesség·idő* összefüggést, és jól ismeri az út–sebesség–idő problémákat, akkor az első (nem „mozgási”) feladat számára rutinszerű. Érdemes ismét utalnunk arra, hogy a sikeres problémamegoldók szituációs modellépítők, akik a problémában leírt szituáció megértésére törekszenek. Ha különböző szituációkban ugyanazt a struktúrát felismerjük, meg tudunk oldani problémákat analogikusan (*Dreyfus* és *Eisenberg*, 1998). Ez arra figyelmeztet bennünket, hogy helyes osztályozásnál a *probléma típusa már a megoldás típusára is utal* (*Pólya*, 1979).

Ha a legtöbb iskolai csoportosításra gondolunk, akkor könnyű belátni, hogy a feladatok *struktúrája* szempontjából nehezen hasznosíthatók. Például a tanuló felismeri, hogy (például) „mozgási” feladattal áll szemben, de nem tudja, hogy ezt a *felszínes leírást* miként használja fel a konkrét számítási műveletekhez. A jó megértés érdekében nyilvánvalóan szükséges a „mozgási” feladatok (struktúra szerint megkülönböztetett) *alcsoportjainak* számbavétele. *Mayer*, *Larkin* és *Kadane* (1984) nyomán néhányat a 2. táblázatban mutatunk be (lásd még *Mayer* és *Hegarty*, 1998). Ez a példa is érzékelteti, hogy elhatárolható a *felszíni struktúra* és a *mély struktúra* (*Schoenfeld*, 1985).

A problémamegfogalmazás szerepe

A következőkben abból az alapvető megfontolásból indulunk ki, hogy a feladat tolmácsolása, *megszövegezése* befolyásolhatja a problémareprezentációt (és így a megoldást). Ezt tapasztaljuk akkor is, ha a fogalmazás sugalmazására a tanuló az egyenlet felállításakor azt a mennyiséget kívánja növelni, amelyik már eleve nagyobb (*Mosonyi*, 1972; *Mayer*, *Lewis* és *Hegarty*, 1992). Komoly szemantikai probléma a következő: a „hasonló” szó mást jelenthet a matematikai és hétköznapi szóhasználatban (*Hart*, 1981).

2. táblázat. Négy problématípus az egyszerű mozgásokra vonatkozó feladatok köréből (Mayer, Larkin és Kadane, 1984)

Probléma leírása	*Propozicionális struktúra*	*Példa*
Egy test elindul, amelyet később egy másik követ nagyobb sebességgel.	(*A* test sebessége) = ___ (*B* test sebessége) = ___ (*A* és *B* test mozgásideje) = ___ (A találkozásig eltelt idő) = ?	A 350 km/h átlagsebességgel repülő teherszállító gép után 2 órával ugyanabba az irányba egy másik gépet indítanak 600 km/h átlagsebességgel. Hány óra múlva éri utol ez a teherszállító gépet?
Két test közös kezdőpontból indul ellentétes irányba.	(*A* test sebessége) = ___ (*B* test sebessége) = ___ (*A* és *B* test távolsága) = ___ (Idő) = ?	Két testet egyszerre indítanak egy helyről ellentétes irányba 36 m/s és 20 m/s átlagsebességgel. Hány másodperc múlva lesz a távolságuk 574 m?
Egy test *A* pontból *B* pontba mozog, majd visszatér.	(Sebesség *A*–ból *B*–be) = ___ (Sebesség *B*–ból *A*–ba) = ___ (Mozgásidő) = ___ (Teljes út) = ?	Két helyiség közötti autóbuszjáraton a kocsik átlagsebessége egyik irányban 40 km/h, a másik irányban 60 km/h. Egy teljes forduló menetideje 1,5 óra. Mekkora a két helyiség közötti távolság?
Két test mozog egymással szembe.	(*A* test sebessége) = ___ (*B* test sebessége) = ___ (*A* és *B* test távolsága) = ___ (Idő) = ?	Két faluból, amelyek egymástól 10 km távolságra vannak, egyszerre indul egy-egy autó egymással szembe. Az egyik 45 km/h, a másik 50 km/h átlagsebességgel halad. Mennyi idő múlva találkoznak?

A bizonytalan ismeretek felhasználása, az alkalmazott eljárások, szabályok, valamint a (talán szemléletesnek tartott) magyarázatok értelmezése külön erőpróba. A következő *vitatható* definíció egy 6. osztályos tankönyvben (*Andrásyné*, *Czeglédyné*, *Czeglédy*, *Hajdú* és *Novákné,* 1989) található: „A törtet egyszerűsítjük, ha a törtet nagyobb törtrészekből állítjuk elő. Például $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.. A harmad nagyobb törtrész, mint a kilenced, mert az egészet kevesebb egyenlő részre osztjuk.” Kétségkívül megzavarhatja a gyerekeket, hogy egy mondaton belül ugyanaz a szó két különböző jelentéssel szerepel: „A törtet egyszerűsítjük…” esetében a törtszámra, míg „… ha a törtet nagyobb törtrészekből állítjuk elő” esetében a törtszám által jelölt törtmennyiségre kell gondolnunk, hiszen csak egy mennyiséget lehet részekből előállítani (*Majoros*, 1992. 49. o.). A nyelv szerepéről, az elnevezések *minőségéről* a tanulók számfogalmának kialakításával kapcsolatban ugyancsak beszélhetünk (*Fuson*, *Fraivillig* és *Burghardt*, 1992; *Miller*, 1992; *Miller* és *Parades*, 1998). Sajnos a fogalmi zavarok az évek folyamán egyre hibásabb feladatmegoldásokhoz vezetnek.

Amint az előző példák is mutatják, a *megfogalmazás* túl összetett dolog ahhoz, hogy *egy* (valamilyen általános) *nyelvi szempontként* kezeljük. (A nyelvi változók megválasztásának lehetőségeiről ld. *Laborde*, 1990). Az osztályozás kérdéséhez tartozik, hogy bármelyik megfogalmazásbeli vonás, nyelvi sajátság szemponttá válhat, ha azt változóként kezeljük. E kérdéskör vizsgálódások tárgya lehet. (Ebben a tanulmányban ld. *A vizsgálat változórendszere* című részt.)

Az elvonatkoztatás és az általánosítás szempontjai

Az algebrai ismeretek további megalapozását jelenti a *betűabsztrakció* (*Molnár*, 1967). Az *absztrakciós szinteket* tekintve a nagyszámú lehetőségből néhány alapvető, lényegesen különböző és egyértelműen megkülönböztethető fokot célszerű előtérbe állítani. Először is két szempontot el kell különítenünk: (1) az *általánosítást* (egyedek–halmazok, számadatok–paraméterek) és (2) az *absztrahálást* (konkrét dolgok–absztrakt dolgok) (*Nagy*, 1985). Gondoljunk például arra, hogy a sokszög a háromszögnél általánosabb, de nem absztraktabb (*Cser*, 1972).

Pólya (1988) nyomán *általánosításnak* mondjuk, ha a dolgok egy adott halmazáról egy azt tartalmazó bővebb halmazra váltunk. (Általánosíthatunk egy dologról a dolgot tartalmazó egész osztályra.) Például, amikor négyzet helyett téglalapot vagy (esetleg későbbi általánosításkor) négy oldalú poligonokat vizsgálunk. Általánosítunk, ha egy állandót változóval, egy rögzített számot $2k$-val vagy (újabb általánosításkor) n-nel helyettesítünk. Vegyük észre, a két példában az általánosítást eltérő módon végeztük.

Szöveges feladatokban gyakran változó helyett rögzített értéket vizsgálunk. Ha *általános adatok* (betűk) helyett csupán számadatokkal dolgozunk, elmarad a képletek tanulságos vizsgálata és az eredmények értékes ellenőrzése. A „számokról” „betűkre” térve olyan problémákhoz juthatunk, amelyeknek egészen más (és sokkal érdekesebb) interpretációja is lehet (*Pólya*, 1979; *Kiessling* és *Körner*, 1985; *Karácsony*, 1994). Esetünkben ezt hangsúlyozva *egyedi szöveges feladatoknak* nevezhetjük azokat a szöveges feladatokat, amelyekben a *megadott mennyiségek* számértékkel szerepelnek (azaz nem *paraméterek* jelölik ezeket). A többi feladatot *általánosnak* minősítjük. Első közelítésben megelégedhetünk dichotóm kategóriákkal, egyszerűen egyedinek vagy általánosnak tekintve a feladatokat. További lehetőség az így definiált általános feladatok megkülönböztetése az *általánosság mértéke* alapján: egy sokfokozatú skála (skálarendszer) megtervezése (az elmondottak értelmében), mely az egy paraméteres felvetéstől a több paraméteresen keresztül a megszorítások korlátozásáig terjed. Két dolog biztos: (1) amit általánosítunk, az már lehet korábbi általánosítás eredménye, egyúttal (2) egy feladaton belül több általánosítási lehetőség kínálkozhat. Az elhatárolás tehát itt is csak hangsúly és nézőpont kérdése.

Mielőtt az absztrakció szempontjából a feladatok tárgyai (azaz a bennük levő dolgok), és eszerint a feladatok között különbséget tennénk, kicsit időzzünk még az általánosítás témájánál: hogyan tükröződhet a matematikai megértés, előfeltétel-tudás színvonala az általánosítás szokásos buktatóiban.

A szöveges feladatok megoldása egyenletek felállítására s rendezésére épül. Csakhogy az egyenletrendezések közben sok feltűnő hiány és hiba tapasztalható. Ma is észlelhető a következő – *Beke Manó* (1900, idézi *Hajnal* és *Némethy*, 1989. 89. o.) által említett – hiba: „Ha az $x + a = b$ és $\frac{x}{a} = b$ alakú egyenleteket már hibátlanul oldják meg a tanulók, még mindig hibát ejtenek az $a - x = b$, az $\frac{a}{x} = b$ egyenletek megoldásánál."

Előfordulhat, hogy az egyenletek megoldásának tanításakor az *átalakítások* (azonos átalakítások, mérlegelv) és az ekvivalens egyenletekhez kapcsolódó fogalmak (megoldási lépések, „eszközjellegű" ismeretek) elsajátítása megértés nélküli vagy csak részben megértett (*Csapó*, 1992). *Steinberg*, *Sleeman* és *Ktorza* (1990) vizsgálatában a tanulóknak meg kellett határozniuk, melyik egyenletpárok egyenletei ekvivalensek. A legtöbb gyerek ismerte az átalakítások szerepét, mégis ez a tudás a válaszaikban (a kísérő magyarázataikban) pontatlanul tükröződött: az *átalakításokon alapuló* magyarázatok aránya alacsony volt. A tanulók majdnem egyharmada az egyenletek ekvivalenciájának eldöntésekor inkább kiszámolta a megoldásokat. Még az $x + 2 = 5$ és $x + 2 - 2 = 5 - 2$ egyenletpárnál is, ahol az első egyenlet megoldásához „tapad" a második.

A szerzők – egyebek között – lehetségesnek tartják, hogy a tanulók értették az ekvivalens egyenletek fogalmát, azonban szükséges volt (a bizonyosság kedvéért), hogy mindegyik esetet ellenőrizzék. Utalnak *Fischban* (1982) tanulmányára, amely szerint a gyerekek az *általános eset* bizonyítása után is szükségesnek vélték a *speciális esetek* ellenőrzését. Mindenesetre gyanítható, hogy számos tanuló bizonytalan abban, hogy ekvivalens átalakítással kapott egyenletnek ugyanaz-e a megoldása.

Valószínűleg a dolgot nehezíti, ha az egyenletben több változó fordul elő (paraméteres egyenletek). A geometria, a fizika képletei ilyen egyenleteknek foghatók fel. Ezekben bármelyik betűvel jelölt mennyiséget vehetjük ismeretlennek, a többit megadottnak (ismertnek). Például sok egyes trapéz területének kiszámításától jutunk az általánosításig. De a *betűegyütthatós egyenleteknél* újabb problémák jelentkeznek: csak a gyök diszkutálása és ellenőrzése után tekinthetjük a feladatot megoldottnak. Ilyenkor jól szolgál, ha mind a megoldás közben, mind pedig az ismeretlen végső kifejezésénél a konstansnak (ismertnek) tekintett betűegyütthatók meg nem engedett értékeit is számon tartjuk. E vonatkozásban tudnunk kell, hogy 9. osztályban már természetes kívánalom a gyors egyenletrendezés (*Hajnal* és *Némethy*, 1989).

A továbbiakban a szöveges feladatoknak az *absztrakció* szempontjából történő megkülönböztetésével foglalkozunk. Ehhez a fő *strukturális változókat* vesszük alapul: a *mennyiségeket* és a mennyiségek közötti *kapcsolato(ka)t* (*Lepik*, 1990). Ezek mind *dolgok* sajátságai, tehát a dolgoktól elvonatkoztatva *absztrakt dolgok*: a mennyiség a dolgoknak számmal kifejezhető és jellemezhető tulajdonsága, a relációk, egyenlőségek és hasonlók pedig több dolog között fennálló sajátságok. Marad a kérdés, hogy azok a dolgok, amelyeknek a sajátságairól szó van, maguk is sajátságok-e. Ha nem sajátságok, azaz nem absztrakt dolgok, akkor azok *konkrét dolgok*. (Való igaz, hogy általában különleges nehézséget okoz az elemzésben az absztrakció iterációja: a másodlagos, a harmadlagos stb. absztrakció.) Elvileg egyértelműen eldönthető, hogy adott dolog konkrét-e vagy absztrakt (*Nagy*, 1985). Ily módon *konkrét szöveges feladatoknak* nevezhetjük azokat a szöveges feladatokat, amelyekben konkrét dolgok sajátságairól van szó. A többi feladatot egyszerűen *absztraktnak* mondjuk. Ha most az absztrakt dolgok számát is figyelmünk körébe vonnánk, akkor a feladatokról szólhatnánk az *absztrakció mértéke* szerint.

A problémákat jellemezve utalnunk kell a következő pedagógiai elemzésre (*Nagy*, 1985). Az absztrahálás jól ismerten különböző szinteken valósulhat meg. A tevékenység *eszközeit* tekintetbe véve megkülönböztethető az *absztrakció manipulatív*, *képmási*, *verbális* és *szimbolikus szintje*. Persze e négy alapvető szinten belül is több fokozat működik. Ha az adott dolog megismerésében történő előrehaladást, a dologba való egyre mélyebb *behatolást* vesszük figyelembe, akkor az *absztrakció behatolási szintjeit* kapjuk: *formai*, *viselkedési*, *szerkezeti* és *működési szinteket*. Ezzel $4^2 = 16$ szint között tehetünk különbséget. A legalacsonyabb absztrakciós (a legkonkrétabb) szintet a manipulatív és a formai szint együttese adja. A legmagasabb absztrakciót a formális és a működési szintek adják közösen. Elsősorban a manipuláció és a szemléltetés jelenti a konkretizálást mint pedagógiai követelmény. E szintelemzés pedagógiai tanulsága pedig témánk szempontjából: *az életkornak meg a tudásbeli feltételeknek megfelelő absztrakciós szinteken várható csak a szöveges feladatok megértése, a kijelölt tudás feldolgozása és elsajátítása.*

Lássunk most példákat. Az iskolai matematika a legtöbb tanuló számára szimbólumoknak olyan manipulációja, ahol a szimbólikus struktúrák jelentése kimerül a szimbólikus jelölésekben (*Greeno*, 1991). A „*vízcsapos*" feladatoknál nehézséget idézhet elő, ha a tanuló nem érti az egész munka absztrakt 1-gyel történő jelölését. „Lélektani és módszertani szempontból is teljesen helytelen lenne abból kiindulni, hogy »válasszuk a kert területét egységnyinek«, mert a tanulók számára korántsem természetes, hogy az »egész kert« konkrét képzetéhez az absztrakt egységet (az 1-et) kapcsolják!" (*Faragó*, 1960, idézi: *Mosonyi*, 1972. 114. o.)

De nemcsak a matematikai jelölések absztrakt világa jelenthet gondot. Egyebek mellett a *keveréses* példáknál a hibák számát befolyásolhatja az is, hogy szilárd anyagot, folyadékot vagy gázt kell-e egy oldószerben feloldani. „A magyarázat csak a tárgykörrel lehetséges: a konyhasó kézbe vehető, mindennap látható anyag, semmi különöset sem jelent még a tapasztalatszegény gyermekeknek sem, ezzel szemben a sósav gáz, a sósavoldatot sósavnak szokták nevezni. A sósav fogalma is zavaros lehet, nem fogható meg, nem a mindennapos életben, hanem iskolában, laboratóriumban – esetleg egyes tanulóknál –, gyárban használt anyag" (*Mosonyi*, 1972. 112. o.). Kísérlettel megmutatható, hogy „… a hőtani tárgykör nehezebb a gyermek számára, mint az anyagok keverése, még abban az esetben is, ha az oldott anyag gáz. Ezt természetesnek kell tartanunk, hiszen a kalória absztraktabb fogalom a gyermek számára mint a gáz” (*Mosonyi*, 1972. 114. o.).

A következő feladat nehézsége abban rejlik, hogy a megoldás azt kívánja a tanulóktól, hogy a problémát egy sokkal általánosabb absztrakt környezetben lássák: „Egy parkolóban csak kerékpárok és autók vannak. Ha összesen 20 kerék van, akkor mennyi a kerékpárok és az autók száma?” Általános iskolai tanárok úgy találták, hogy bár a gyerekek általában gond nélkül kiszámítják a parkolóban található kerekek számát, ha ismert a kerékpárok és az autók száma, csak kevesen rendelkeznek a megértés olyan mélységével, hogy képesek az *alapprobléma* megfordításának megoldására (*Dreyfus* és *Eisenberg*, 1998).

A „zokni-probléma” és a most említett példák tanulságai után már nem is igazán meglepő egy *mai* (kilencedik osztályos) középiskolai átlagtanuló *elutasító magatartása* például a következő (csillaggal nem megjelölt, *érettségizőknek szánt*) feladat láttán: „Háromféle vizes oldatunk van. Összetételük: 4% NaCl és 17% KCl; 13% NaCl és 6% KCl; 8% NaCl és 3% KCl. Milyen arányban keverjük a három oldatot, hogy a keverékben 10% NaCl és 5% KCl legyen?” (*Gimesné*, 2000). „Nem azért idegenkedik a gyerek a matematika tanulásától az iskolában, mert ’lusta, rossz …’, hanem valami olyat kérnek tőle, ami teljesíthetetlen a számára.” (*Majoros*, 1992. 9. o.) Már a legelején az a veszély fenyeget, hogy akik nem értették meg az anyagot, sikertelenségük miatt túlságosan szorongókká válhatnak: minél szorongóbb egy tanuló, annál jobban igyekszik, de annál kevésbé képes a dolgok megértésére, s így még szorongóbbá válhat (*Skemp*, 1975).

Sémák kialakítása és fejlesztése

Miután a szöveges feladatokat a tartalom, az általánosítás és az elvonatkoztatás (absztrahálás) szempontjából vázlatosan bemutattuk, térjünk vissza a *séma* témájához. Amint láttuk, séma használatával egy adott szöveg szemantikus relációi és matematikai struktúrája között létesíthető leképezés. Mivelhogy a séma alapú gondolkodás kívánatos a matematikai tapasztalatok szervezésénél, a legtöbb tanuló számára az iskolai szöveges egyenletek nehézségének egyik oka bizonyára a feladatok *változatossága* (*Berger* és *Wilde*, 1987). Világos, több különböző sémával kell rendelkeznünk, hogy nagyobb eséllyel birkózzunk meg a váratlannal (*Skemp*, 1975).

És ami talán még ennél is jelentősebb: *Silver* (1990) rámutat arra – hivatkozva *Sweller* és mtsai. (*Sweller* és *Levine* 1982; *Sweller*, *Mawer* és *Ward* 1983; *Owen* és *Sweller* 1988) tanulmányaira –, hogy a *célspecifikus* problémák (3. táblázat) megoldásakor a tanulók inkább *általános stratégiákat* alkalmaznak, amelyek bár bizonyos feladatok vagy problémák megoldásakor hatékonyak, a fogalmak és eljárások közötti kapcsolatok megtalálására vagy a tudás szervezésére nem kifejezetten hasznosíthatók (*Pierce*, *Duncan*, *Gholson*, *Ray* és *Kamhi*, 1993). Vagyis a *nem célspecifikus* problémák lehetőséget kínálnak a tanulóknak a lényeges relációkat kiemelő stratégiák használatára, ami segíthet a használhatóbb képességek, valamint egy jobban szervezett tudás, így a sémák kialakításában és fejlesztésében. *Doblaev* (1957, idézi: *Brugman*, 1995) szerint az *explicit* *kérdés nélkül problémák* segítségével a tanulók megtanulhatják, hogyan kell a megoldást nyújtó kérdést feltenni, amikor egyenletek felállításával oldanak meg problémákat, egyszersmind automatikusan felkészülnek egy szintézisen alapuló módszer alkalmazására a problémamegoldásban.

3. táblázat. Példák cél- és nem célspecifikus problémákra (Silver, 1990. nyomán)

Célspecifikus probléma	*Nem célspecifikus probléma*
Éva és Kati kerékpárral mennek iskolába. Éva 800 m, Kati 1200 m távolságban lakik az iskolától. Éva minden reggel 4 perc alatt teszi meg az utat az iskolába. Hány perc alatt ér Kati az iskolába, ha ugyanakkora átlagsebességgel halad, mint Éva?	Éva és Kati kerékpárral mennek iskolába. Éva 800 m, Kati 1200 m távolságban lakik az iskolától. Éva minden reggel 4 perc alatt teszi meg az utat az iskolába. Írj le és oldj meg annyi különböző problémát, amennyit csak tudsz!

E szemlélet lényeges konzekvenciákkal járhat a tanítást illetően: előtérbe kerülhet a *problémafelvetés* (problem posing) (*Brown* és *Walter*, 1977, 1983; *Kilpatrick*, 1987; *Gonzales*, 1994). Ennek nyomán erősödhet a tanárok érdeklődése a *több megoldású problémák* (4. táblázat) iránt (*Borasi*, 1986; *Moses*, *Bjork* és *Goldenberg*, 1990). Végül, de nem utolsósorban: az ilyenszerű feladatok nélkül a tanulók hajlamosabbak a szöveges problémákról azt gondolni, hogy csak egy helyes megoldásuk létezik, amelyhez valamennyi szükséges információ adott (nem több, nem kevesebb). Egy problémával találkozva pedig ezek a *nézetek* (*belief systems; Schoenfeld*, 1985) hibás teljesítményhez vezethetnek (*Bransford*, *Zech*, *Schwartz*, *Barron* és *Vye*, 1998).

4. táblázat. Probléma egy és több megoldási lehetőséggel

Egymegoldású probléma	*Több megoldású probléma*
Tíz- és húszforintos címletekben 240 forintom van. A tízesek és húszasok aránya 2:3. Hány db tízforintosom és hány db húszforintosom van?	Tíz- és húszforintos címletekben 240 forintom van. Hány db tízforintosom és hány db húszforintosom van?

Kétségtelen, hogy a tanulók gyakran nem különböztetik meg a problémában meglevő lényeges információt a lényegtelentől (*Novick*, 1992). Vegyük ehhez hozzá, hogy a *kezdő olvasók* (*novice readers*) gyenge pontja a mellékes apróságok kikerülése, a figyelem tudatos irányítása (*Stanovich* és *Cunningham*, 1991). Nem véletlen tehát, hogy ugyancsak nehézkesen különítik el a *fölösleges* adato(ka)t vagy információ(ka)t. Nagyon lehetséges, hogy ez hátráltatja a megoldást, sőt hibákhoz vezethet (*Fung Lin Ng Li*, 1990). Íme egy *szükségtelen* információt tartalmazó feladat: Egy kocsi első kerekének átmérője 50 cm, a hátsóé 75 cm. Mekkora távolságon fordul az első kerék 50 fordulattal kevesebbet, mint a hátsó kerék fordulatai számának a kétszerese, *ha a tengelyek távolsága 175 cm*? Ilyenkor természetesen *több* adatra kell reagálnunk: az információk feldolgozása jobban terheli a *rövid távú memóriánkat* (sajátos szerepét kiemelő értelmi nyomatékkal *munkamemóriának* is nevezik), más szóval korlátozott kapacitásunk megnehezíti az információk kezelését.

Az információfelvétel jelentőségét hangsúlyozandó, nem lehet említés nélkül hagyni a *hiányos* problémákat: azokat, amelyeknél kívánatos vagy nélkülözhetetlen *további* információk felkutatása, bevezetése (*Pollak*, 1987; *Vidákovich* és *Csapó*, 1998). Valószínű, hogy a matematikai feladatok megoldásában járatos tanulók számára a „zavaró" körülmények felismerése általában könnyebb (*Low* és *Over*, 1990). Az elmondottakat két példával egészítjük ki. (1) Egy 30 cm hosszú és 20 cm széles, téglalap alakú doboztetőn 200 cm^2 nagyságú nyílást kell vágni úgy, hogy a nyílás széle mindenütt egyenlő távolságra legyen a doboz szélétől. (*Mi lehet a kérdés?*) (2) Két széntelep közül az egyiken 185 tonna szén van. Ha erről naponta 15 tonna szenet, s a másikról 18 tonna szenet szállítanak el naponta. Hány nap múlva marad a másikon másfélszer annyi szén, mint az elsőn? (*Hiányzik a másikon levő szén tömege.*)

Összegezve elmondható, hogy a *tanulók olvasni tudása és olvasásmegértésének fejlettsége a szöveges matematikai feladatok megoldására közvetlen hatással lehet*: a helyes megoldási eljárás a probléma jelentésének felismerésén, megértésén alapul, értsd a sikeres problémaértelmezéshez többre van szükség, mint a probléma minden szavának elolvasása (*Lukácsné* és *Rábai*, 1971. 58. o.), *meghatározó a problémareprezentáció*. Ezért kívánatos minél több problématípus ismerete. Itt egyaránt gondolunk fogalmaink és sémáink tudatosulására, a köztük levő kapcsolatok és struktúrájuk megértésére, valamint a velük való manipulációkra.

Módszer

A vizsgálat változórendszere

A mérés céljának megvalósításához alapvetően a *Lepik* (1990) által kipróbált 31 változó nyújtott kiindulási alapot. Felhasználásuk lehetővé teszi az eredmények párhuzamba állítását (a vizsgálatok megegyező és eltérő feltételeinek, sajátosságainak tudatában). A továbbfejlesztés konkrét lehetőségeinek feltárása érdekében – a leírt szempontok alapján – 5 mutatót vezettünk be (ezekre majd a jelölésrendszerünkben a + jel utal).

Minthogy két részterület kapott nagyobb szerepet a vizsgált tényezők meghatározásakor, elkülöníthetők a *felszíni* (nyelvi elemekre vonatkozó) jellemzők és a *struktúrával* kapcsolatos változók. Az első csoport – *Lepik* nyomán – a következő mutatókat tartalmazza:

F1: „Karakterek *száma (szóköz nélkül)*". Idetartoznak az alfabetikus jelek, számok, írásjelek vagy a szimbólumtáblából beilleszthető rajzos jelek, szimbólumok.

F2: Betűk száma.

F3: „*Szavak* száma” (az egyenlőségjelek, a mennyiségjelek, a számértékek és a mértékegységjelek törlése után).
F4: „Szavak száma” (az egyenlőségjelekkel, a mennyiségjelekkel, a számértékekkel és a mértékegységjelekkel együtt).
F5: Átlagos szóhossz (F2/F3).
F6: Legalább 6 betűs szavak száma.
F7: Legalább 9 betűs szavak száma.
F8: Legalább 12 betűs szavak száma.
F9: Legalább 6 betűs szavak relatív gyakorisága (F6/F3).
F10: Legalább 9 betűs szavak relatív gyakorisága (F7/F3).
F11: Legalább 12 betűs szavak relatív gyakorisága (F8/F3).
F12: Mondatok száma.
F13: Átlagos mondathossz a *karakterek (szóköz nélkül)* szintjén (F1/F12).
F14: Átlagos mondathossz a szavak szintjén (F3/F12).
Ez a változórendszer (F1, F2, …, F14) lehetővé teszi két új mutató bevezetését:
$F_{+}15$: Átlagos mondathossz a „*szavak*” szintjén (F4/F12).
$F_{+}16$: *Nem betű karakterek* száma (*szóköz nélkül*) (F1-F2).

Mielőtt a többi változót bemutatnánk, kissé részletesebben meg kell ismerkednünk a *feladatok szerkezetének* fontosabb tényezőivel, jellemzőivel. Persze ahhoz, hogy a fizikai mennyiségek közötti kapcsolatokról áttekinthető képet kapjunk, szükséges bizonyos fogalmak tisztázása (miként azt *Lepik* tette).

A *relációs rendszer* szemléltetésére ábra (gráf) kínálkozik (*Pólya*, 1979. 162. o.; *Csapó*, 1992). Minden mennyiségnek megfeleltethető egy *pont*. Vegyük most figyelembe, hogy vannak *megadott* és *meghatározandó* (ismeretlen) mennyiségek. A megoldáshoz azonban szükség lehet *segédismeretlenek* bevezetésére (meghatározására) is (*Pólya*, 1979). A háromféle mennyiséget eltérő szimbólumokkal jelöljük: $\otimes_i$ = megadott mennyiség, $\oplus_j$ = kérdezett mennyiség, $\varnothing_k$ = segédismeretlen, ahol *i*, *j*, *k* olyan indexeket jelent, amelyek mindegyike az 1, 2, …, *n* értékeket veszi fel. A mennyiségek közötti kapcsolatokat egyenletek (formulák) írják le. Jelölje ezeket a Θ_l szimbólum ($l = 1, 2, \ldots, n$), és a pont helyett *csomópontot* mondunk. Ehhez meg kell jegyezzük, hogy a pontokat a csomópontokon keresztül a *gráf élei* (vonaldarabok) kötik össze. A pontokat és csomópontokat a *gráf csúcsainak* nevezzük. Az éleket irányítjuk, azaz megjelöljük (rajzban rendszerint nyíllal), melyik pontból (csomópontból) melyik csomópontba (pontba) megy.

Gondolatmenetünkből következik, hogy egy adott összefüggésbe behelyettesítendő mennyiségek pontjaiból nyilak futnak be az összefüggést képviselő csomópontba, s az onnan kilépő irányított vonal a meghatározandó mennyiség pontjában végződik. A gráf ábrázolása egyszerű: alkalmazzuk ezt az eljárást a megadott mennyiségek pontjaiból kiindulva, és folytassuk a *vonalrendszert* addig (a csomópontokon átvezető élek rajzolásával), amíg a kérdezett mennyiség pontjába nem jutunk.

Ezek után a második kategória elemei *Lepik* összefoglalása alapján:
S1: Megadott mennyiségek száma.
S2: Kérdezett mennyiségek száma.
S3: Segédismeretlenek száma.

S4: Meghatározandó mennyiségek száma (S2 + S3).
S5: Gráf pontjainak száma (S1 + S4).
S6: Formulák (szükséges, alkalmazandó képletek) száma.
S7: Egyenletek száma. (Egyenlet felírása, matematikai modell megfogalmazása: a feladatot a tanuló a megoldáshoz matematikai formában állítja fel.)
S8: Gráf csomópontjainak száma (S6 + S7).
S9: Gráf csúcsainak száma (S5 + S8).
S10: Gráf éleinek száma.
S11: Pontok fokszámainak maximuma. (A gráf egy csúcsához illeszkedő élvégek számát a csúcs fokszámának vagy röviden a csúcs fokának nevezzük.)
S12: Csomópontok fokszámainak maximuma.
S13: Élek és pontok aránya (S10/S5).
S14: Élek és csomópontok aránya (S10/S8).
S15: Élek és csúcsok aránya (S10/S9).
S16: Gráf köreinek száma. (A kör olyan zárt vonal, amely nem megy át kétszer egyetlen csúcson sem. A zárt vonal egymáshoz csúcsban csatlakozó élek sorozatából áll, és nincs olyan él, amely az élsorozatban kétszer fordul elő, továbbá a kezdő- és végpont egybeesik.)

Végül *Lepik* megemlíti a két területet egységben megjelenítő egyetlen változóját:
FS1: Szavak és élek aránya (F3/S10).
Úgy véljük, e felépítésben természetesen vetődik fel három további mutató bevezetése:
FS+2: Karakterek (szóköz nélkül) és élek aránya (F1/S10).
FS+3: „Szavak" és élek aránya (F4/S10).
FS+4: Nem betű karakterek (szóköz nélkül) és élek aránya (F+16/S10).

További kérdés az, hogy a tanulók milyen mértékben teljesítették a követelményeket. Legfőképp azt kell tudnunk, hogy az egyes feladatokra hány pontot adjunk. A tanulók teljesítményével, a feladatok megoldása során végzett munkájával kapcsolatosan *Lepik*nél két változó szerepel. Az egyik a *gondolatmenetet* emeli ki: *jó* vagy *nem jó*. A válasz pontértéke 1 pont, amennyiben a logikai lépések helyesek, vagyis a feladatmegoldás menete jó (az eredmény lehet hibás *numerikus tévedés* miatt). Ha viszont rossz a megoldás terve, téves a továbbhaladás útja, akkor nulla pontot ér. A másik változó a *megoldási idő*, annak kifejezése, hogy egy adott feladat megoldása mennyi időt vett igénybe. A tesztek megíratásakor a tanulóktól megkövetelték, hogy a lapokra leírják az egyes megoldások megkezdésének és befejezésének időpontjait.

Szükséges itt röviden rámutatni, a gyakorlatban felmerülő néhány problémára. Ami a dichotomizálást illeti, különösen kiélezetté válik az értékelési objektivitás kérdése, hiszen a tanulók teljesítményeiben felbukkanó hibáknak több oka lehet. Például egy egyenlet felállításánál elkövetett hiba – többek között – eredhet a fogalmak tisztázatlan voltából, alapulhat megszokáson, formalizmuson, s hiányos előismereteken, ámde származhat egyszerűen figyelmetlenségből, feledékenységből, sőt visszavezethető érzelmi tényezőkre is (*Mosonyi*, 1972). Vagyis egy *elírás* lehet véletlen, de hibás gondolkodás eredménye is. Érthető, hogy zavart kelthetnek az előjelhibák. További fogyatékosság: egy *tévesztést* különböző súllyal (pontértékkel) lehet számba venni a mozgásegyenletek felírásakor (számíthat), illetve az ismeretlenek kiszámításakor (nem számít). Úgy tűnik, az értékelés dichotomizálása egyben megnehezíti a tanulók teljesítményeinek a besorolását. A minősítés ezúton nagymértékben hordoz szubjektív elemeket.

Hangsúlyoznunk kell még a feladatok komplexitását, illetve a kérdéses értékelés e komplexitáshoz viszonyított egyszerűségét. Minden további érvelés nélkül belátható, ha a tanulók figyelmét a feladatelemekkel kapcsolatos nehézségek kötik le, akkor kevésbé képesek megragadni a gondolatmenetet a maga egészében. Gyakran előfordul, hogy a tanuló a kitűzött feladat egy részét meg tudja oldani, a másik részét nem. Mint látható, a két kategória túl kevés annak a változatosságnak a kezelésére, ami *a nem hibátlan megoldások* tekintetében megfigyelhető.

Ez mégis a dolgoknak csupán az egyik oldala. Csak jelezzük e helyütt, hogy egy-egy *helyes válasz* jelentheti a *betanult* feladatmegoldási receptek „felmondását" is. Szélsőséges esetben a tanulónak kényszerként kell választania a tanár által kijelölt utat: „a matematikát nem kell érteni, csak a szabályokat megtanulni!" (erre példát is említ *Majoros*, 1992, 57. o.) Nem zárható ki a képletek gondolkodás nélküli kiírása a függvénytáblázatból sem. És még ezeken felül csalás is megeshet. Tapasztalataink szerint egy-két orientáló megjegyzés egy egész osztály teljesítményét befolyásolhatja. Legfőbb hiba, hogy pusztán egyetlen (a megoldáshoz szükséges és elégséges) egyenlet *tudás nélküli* felírása helyesnek minősített válaszadást jelenthet.

Mindezek eredőjeként problematikusnak éreztük, hogy a teljesítmény színvonalával kapcsolatban csak egyetlen alternatív lehetőség maradjon (1 pont vagy 0 pont). Ezért egy a pedagógiai kutatásokban közismert, *az iskolai gyakorlathoz közelebb álló*, viszonylag egyszerű pontozási eljárást alkalmaztunk. *Mindegyik feladat megoldására a tanulók maximálisan annyi nyerspontot kaphattak, amennyi logikai lépést, választ vagy egyéb önállóan értékelhető egységet (itemet) tartalmazott a megoldás (itemenként 1 pont).* Éppen ezért a tesztek készítésekor szem előtt tartottuk, hogy a számadatok a megoldásokat lehetőleg ne nehezítsék.

A *megoldási idő* mérése ugyancsak okozhat gyakorlati szempontból problémát. Számolni kell azzal, hogy több tanuló a teszt megoldása közben pásztázik a feladatok között. Ekkor a megfelelő időpontok rögzítése zavaró lehet, s ilyenképpen befolyásolhatja a teljesítményt. Fokozza a nehézséget, ha a tanuló nagy fontosságot tulajdonít az *erős munkatempónak* (ez kivitelezési hibákhoz vezethet). Nem feledkezhetünk meg arról sem, hogy ezek az adatok önbevallásosak. (Egy reálisabb képhez ez megítélésünk szerint *megfigyelés* is szükséges volna.) Ennek folytán felmérésünkben ezt a mutatót nem használtuk.

Természetesen a teljesítmények elemzésekor nem mellőzhető egy olyan vizsgálat, amely az eredmények *megbízhatóságát* értékeli. A feladatok szintjén általában nem szokás kiszámolni a reliabilitást. Ugyanakkor jó tudni, hogy *egy adott csoportban az egyes feladatok segítségével mennyire megbízhatóan lehet egymástól elkülöníteni a különböző képességű tanulókat*. Ezért foglalkoztunk a feladatokra kiszámított reliabilitásértékeknek a nyelvi és a strukturális változókhoz fűződő kapcsolataival.

A tesztek és a tesztfeladatok

A vizsgálat célkitűzését tekintve számításba vettük azt, hogy a tanulók tudnak elsőfokú kifejezéseket ábrázolni, hiszen az elsőfokú egyismeretlenes egyenletek megoldása szemléletes geometriai tartalmat kaphat, és így tudatosabb lehet. Következésképpen úgy gondoltuk, hogy a *grafikus módszerrel megoldható feladatok* hasznos indítékul szolgálhatnak. Voltaképp az, hogy a tanulók a mennyiségek összefüggéseit, változásait ábrázolni tudják, nemcsak a matematikában, hanem a fizikában (és még más tantárgyban) is fontos. Ennek megfelelően a fizikai tartalmú szöveges feladatok közül az *egyenes vonalú mozgások*ra vonatkozó feladatokat választottuk.

A felhasznált *iskolai példákra* jellemző – miként arra *Borasi* (1986) különböző matematikai példák strukturális analízise alapján rámutatott –, hogy a problémák kontextusa teljes, a feltételek leírása egyértelmű, s minden szükséges adat (általános adat, „betű” helyett *számadat*) adott. A probléma megfogalmazása (az expozíció), amely kérdés formájában jelenik meg: szabatos és világos. A kérdésre adandó választ pedig számszerű eredmények jelentik. A megoldás a tanult $v = \frac{s}{t}$ alapképlet segítségével lehetséges.

A feladatsorok összeállításakor külön figyelmet fordítottunk az olyan feladatok kiszűrésére, ahol az *előismeretnek*, a matematikai követelményeknek túl nagy jelentősége lehet. Nyilvánvalóan középiskolai tanulókkal szemben elvárható követelmény: *biztosan és tudatosan számoljanak a tizedes törtekkel*. Mindamellett a számadatok szándékosan olyanok voltak, hogy egyben *numerikus könnyítést* is jelentsenek, vagyis a számítások során a számolási műveletek szempontjából „egyszerű számok” forduljanak elő. Megjegyezzük, a tanulók a feladatok megoldásához segédeszközként számológépet, függvénytáblázatot használhattak.

A mérőeszközök fejlesztése két fázisban történt. Először (1996 május–júniusában) két középiskolára kiterjedő próbamintán (9. o.: 124 fő; 10. o.: 94 fő) a kiválasztott feladatokat kipróbáltuk, bemértük, aztán a próbamérés tapasztalatainak ismeretében a feladatokat alakítottuk és változtattuk, egyben elvégeztük a véglegesnek tekinthető feladatsor változatokra osztását. A feladatok nyelvi elemeivel, struktúrájával kapcsolatos változóinak alapvető statisztikai mutatóit az 5. táblázatban közöljük.

A méréshez négy (*A*, *B*, *C* és *D*) feladatlap-változatot állítottunk össze. Mindegyik tesztlapra nyolc feladat került. (*Lepik* 35 feladatot alkalmazott összesen 6 teszten.) A mérőlapokat úgy alakítottuk, hogy közel azonos nehézségűek legyenek (a tervezett mérési idő 45 perc).

Az adatfelvétel

Az adatokat 1998 márciusában vettük fel Bács-Kiskun megyében, Csongrád megyében, valamint Somogy megyében. A *Szegedi Tudományegyetem Pedagógiai Tanszéke*, személy szerint *Vidákovich Tibor* indította el, szervezte és irányította a mérést. A kilencedikes mintába (amelyet GSZ-szel fogunk jelölni) 15 középiskolából 9 gimnáziumi és 15 szakközépiskolai osztály (összesen 630 fő) került. A két részminta jelölésére bevezethetjük az iskolatípusok nevének nagy kezdőbetűit: G: gimnázium, SZ: szakközépiskola. *Lepik* (1990) 150 13–15 éves tanulóval 5 iskola osztályaiban dolgozott.)

5. táblázat. A szöveges feladatok nyelvi elemeivel, struktúrájával kapcsolatos változóinak statisztikai mutatói

Nyelvi jellemzők	*Átlag*	*Szórás*	*Struktúrával kapcsolatos változók*	*Átlag*	*Szórás*
F1	180,3	74,7	*S1*	3,59	0,80
F2	160,1	69,5	*S2*	1,06	0,25
F3	28,2	11,6	*S3*	2,41	1,52
F4	35,4	12,9	*S4*	3,47	1,48
F5	5,6	0,4	*S5*	7,06	2,09
F6	13,4	6,3	*S6*	1,97	0,82
F7	6,3	3,0	*S7*	1,56	1,11
F8	1,5	1,7	*S8*	3,53	1,46
F9	46,9	6,2	*S9*	10,59	3,53
F10	22,1	5,8	*S10*	10,69	4,51
F11	5,0	5,3	*S11*	2,00	0,36
F12	2,8	1,2	*S12*	3,13	0,34
F13	67,9	23,5	*S13*	1,46	0,25
F14	10,6	3,6	*S14*	3,02	0,08
$F_{+}15$	13,4	4,4	*S15*	0,98	0,12
$F_{+}16$	20,2	7,9	*S16*	1,13	1,13
			FS1	2,85	1,10
			$FS_{+}2$	18,24	7,33
			$FS_{+}3$	3,58	1,25
			$FS_{+}4$	2,08	0,89

Az adatfelvételi objektivitás biztosítására *mérési útmutatókban* rögzítettük a vizsgálat általános céljait, meg a tesztelési helyzet egyértelmű leírását a közreműködő pedagógusok számára. Kértük őket, hogy a tesztek megíratása előtt gondoskodjanak a felmérésbe bevont tanulók megfelelő motiválásáról. Elengedhetetlen irányelv volt, hogy egy-egy osztályban a négy tesztváltozat arányosan (vegyük úgy, hogy a változatok mindegyikére közelítőleg azonos számú tanuló jusson) és *véletlenszerűen* kerüljön kiosztásra akképpen, hogy az egymás mellett ülőké eltérő legyen. Pontosan meghatároztuk a felülegyelő tanárok által közölhető információkat (mint például a mérés tárgyát, a rendelkezésre álló időt, a használható segédeszközöket, továbbá a kitöltés szabályait). A mérést bevezető rövid tájékoztatót követően a tanulók semminemű segítséget nem kaphattak.

A középiskolai minta jellemzése

A tesztlapváltozatok és az iskolatípusok alapján csoportosított minta belső arányait, eloszlását a 6. táblázat mutatja. (A későbbi jelöléseknél a következő sorrendet követjük majd: iskolatípus – tesztváltozat. Például GA az *A változatot megoldó gimnáziumi tanulók csoportját* jelenti.)

6. táblázat. A 9. osztályos minta eloszlása

	Közép-iskolák száma	*Osztályok száma (9. o.)*	*Tanulók száma (arányuk)*				
			A változat	*B* változat	*C* változat	*D* változat	*Összesen*
Bács-Kiskun m.	*6*	*9*	*59* (9,37%)	*63* (10,00%)	*53* (8,41%)	*53* (8,41%)	*228* (36,19%)
Gimnázium		4	29 (4,60%)	30 (4,76%)	29 (4,60%)	27 (4,29%)	115 (18,25%)
Szakközépiskola		5	30 (4,76%)	33 (5,24%)	24 (3,81%)	26 (4,13%)	113 (17,94%)
Csongrád m.	*5*	*8*	*67* (10,63%)	*60* (9,52%)	*54* (8,57%)	*58* (9,21%)	*239* (37,94%)
Gimnázium		2	20 (3,17%)	17 (2,70%)	12 (1,90%)	16 (2,54%)	65 (10,32%)
Szakközépiskola		6	47 (7,46%)	43 (6,83%)	42 (6,67%)	42 (6,67%)	174 (27,62%)
Somogy megye	*4*	*7*	*44* (6,98%)	*40* (6,35%)	*37* (5,87%)	*42* (6,67%)	*163* (25,87%)
Gimnázium		3	16 (2,54%)	14 (2,22%)	16 (2,54%)	16 (2,54%)	62 (9,84%)
Szakközépiskola		4	28 (4,44%)	26 (4,13%)	21 (3,33%)	26 (4,13%)	101 (16,03%)
Összesen	*15*	*24*	*170* (26,98%)	*163* (25,87%)	*144* (22,86%)	*153* (24,29%)	*630* (*100%*)

Az egyes változatok szerint a 7. táblázat összegzi az 1997/98-as tanév félévi (vizsgálatunkban nagyobb súllyal megjelenő) tantárgyi eredményeit a populációra vonatkozólag. Módunk van annak ellenőrzésére, hogy az ilyen típusú feladatok megoldása összekapcsolható a következő tantárgyakkal: a matematika (M), a fizika (F), az irodalom (I) és a nyelvtan (NY). Az osztályzatok mellett felhasználtuk még az osztályzatok átlagolásával kapott összesített mutatót, melyet *a releváns tanulmányi eredményesség* (RTE) átfogó jellemzőjeként kezelünk. Méréselméleti szempontból ez legalább annyira megbízható mutatónak tekinthető, mint a tanulmányi átlag. Magától értetődő, hogy ezeket a változókat (meglevő adatokat) tettük vizsgálat tárgyává a minták összevonásakor.

7. táblázat. A Szöveges feladatok A, B, C és D tesztváltozatát megoldó tanulók fontosabb tanulmányi eredményei az iskolatípus szerinti bontásban[2]

Minta	*Matematika*		*Fizika*		*Irodalom*		*Nyelvtan*		*RTE*	
	átlag	szórás	átlag	szórás	átlag	szórás	átlag	szórás	átlag	szórás
G	3,47	1,11	3,50	0,93	3,88	0,90	3,80	0,90	3,66	0,74
GA	3,37	1,13	3,49	1,06	3,90	1,01	3,86	0,90	3,65	0,81
GB	3,66	1,03	3,59	0,92	4,07	0,81	3,92	0,88	3,81	0,73
GC	3,47	1,47	3,47	0,86	3,84	0,92	3,82	0,96	3,65	0,75
GD	3,38	1,10	3,45	0,85	3,71	0,82	3,61	0,85	3,54	0,67
SZ	2,73	1,04	2,63	0,94	3,14	0,95	3,01	1,04	2,84	0,77
SZA	2,67	1,03	2,67	0,89	3,10	0,90	3,04	1,12	2,85	0,77
SZB	2,81	1,12	2,70	1,07	3,03	0,96	2,96	1,04	2,85	0,82
SZC	2,80	1,01	2,63	0,97	3,18	1,02	3,05	1,06	2,84	0,83
SZD	2,66	0,98	2,52	0,81	3,26	0,95	3,01	0,95	2,81	0,69
GSZ	3,02	1,12	3,00	1,03	3,43	1,00	3,32	1,06	3,19	0,86
GSZA	2,94	1,11	3,01	1,04	3,41	1,02	3,36	1,11	3,19	0,88
GSZB	3,14	1,16	3,07	1,11	3,43	1,03	3,32	1,08	3,26	0,91
GSZC	3,07	1,12	3,01	1,01	3,45	1,03	3,36	1,09	3,20	0,89
GSZD	2,93	1,09	2,92	0,94	3,43	0,93	3,24	0,96	3,13	0,77

Eredmények

Mivel a vizsgálat céljainak megfelelően a statisztikai elemzéseket a *feladatok mintáján* végezzük majd el, felmerül a kérdés, van-e különbség a tantárgyi osztályzatok (M, F, I, NY és RTE) szempontjából az eltérő tesztváltozatokat megoldó tanulók között. Ennek eldöntésére a G, SZ és GSZ minták szintjén a négy tanulócsoport adataival 15 (3x5) statisztikai próbát hajtottunk végre. Összesen 14 (egyszempontos) varianciaanalízist végeztünk. Egy esetben (a GSZ mintán az RTE mutatóra nézve) az összehasonlítandó csoportok (GSZA, GSZB, GSZC és GSZD) varianciájának egyenlőségére vonatkozó feltétel nem teljesült, így a Kruskal–Wallis-próbát alkalmaztuk. A számítások eredményei nem érik el a szignifikanciahatárt: $p > 0,05$. Ezek szerint a csoportok statisztikailag nem különböznek a vizsgált releváns változók tekintetében. Ezzel ugyan nem bizonyítottuk, hogy egy populációból valók, de legalább meggyőződtünk róla, hogy nem az ellenkezője teljesül-e.

Minthogy a továbbtanulási szokásokban az a gyakorlat, hogy a legjobb osztályzatokat elérő és bizonyára a legjobb képességű tanulók többsége gimnáziumban folytatja tanulmányait, megvizsgáltuk a gimnazisták és a szakközépiskolások osztályzataiban található különbségeket (7. táblázat). A GA és SZA minták fizika eredményének összehasonlításakor a varianciák eltérése lényeges, ezért itt nemparaméteres eljárást, a Mann–Whitney-próbát alkalmaztuk. Egyébként a kétmintás *t*-próbát választottuk. A 25 (5x5)

[2] G: gimnázium, SZ: szakközépiskola, GSZ: gimnázium és szakközépiskola

összehasonlítás eredménye mind szignifikáns (a gimnazisták előnyére): irodalomból a GD és SZD minták eltérésével kapcsolatban $p < 0,01$, a többi 24 esetben $p < 0,001$.

Ahhoz, hogy egy teszt betölthesse funkcióit, szükség van megfelelő értékelő rendszerre. Viszonyítási rendszerünkben azt mérjük, hogy a tanulók milyen százalékos mértékben teljesítették a kitűzött követelményeket. A *százalékos teljesítménymutatók* rövidítésének sablonos formája (feladatoknál): [{*tesztváltozat* betűjele} – {*feladat* sorszáma} – szt] (az szt betűpár a százalékos teljesítményre utal). Például az A1szt mutató az *A* változat 1. feladatának (ezt A1 jelöli) százalékos teljesítéséről ad információt. A teljes *A* tesztváltozatra az Aszt jelölés vonatkozik (azaz: [{*tesztváltozat* betűjele} – szt]). A feladatsorokban (*A*, *B*, *C* és *D*) nyújtott teljesítményeket négy táblázatban foglaljuk össze (*8.*, *9.*, *10.* és *11. táblázat*). A kétféle iskolatípus (G és SZ) teszteredményeinek (Aszt, Bszt, Cszt és Dszt) statisztikai kiértékelése során (a varianciák különbözősége miatt) Mann–Whitney-próbát alkalmaztunk. A gimnazisták és a szakközépiskolások adatai ismét erősen szignifikáns ($p < 0,001$) különbségeket mutatnak (mindenkor a gimnazisták javára).

8. táblázat. Az A változat eredményei (%-ban)

	Gimnázium (n = 65)		*Szakközépiskola (n = 105)*		*Gimn. és szakközépisk. (n = 170)*	
	átlag	*szórás*	*átlag*	*szórás*	*átlag*	*szórás*
A1szt	71,5	40,5	38,6	43,4	51,2	45,2
A2szt	67,3	43,3	50,0	43,0	56,6	43,8
A3szt	17,8	33,0	3,9	16,0	9,2	24,8
A4szt	28,7	37,6	16,7	31,6	21,3	34,4
A5szt	31,0	41,2	10,2	23,4	18,2	32,9
A6szt	28,6	41,6	16,9	34,1	21,3	37,5
A7szt	16,5	30,4	5,0	11,2	9,4	21,4
A8szt	34,8	43,8	6,0	16,6	17,0	33,1
Aszt	*32,7*	*27,0*	*14,7*	*15,6*	*21,6*	*22,4*

9. táblázat. A B változat eredményei (%-ban)

	Gimnázium (n = 61)		*Szakközépiskola (n = 102)*		*Gimn. és szakközépisk. (n = 163)*	
	átlag	*szórás*	*átlag*	*szórás*	*átlag*	*szórás*
B1szt	82,5	35,8	53,3	47,9	64,2	45,9
B2szt	67,5	43,6	43,5	46,7	52,5	46,9
B3szt	45,5	46,9	13,0	29,0	25,2	39,8
B4szt	61,1	43,4	25,6	38,1	38,9	43,5
B5szt	50,0	46,6	9,0	20,7	24,3	38,3
B6szt	38,3	42,1	12,1	21,4	21,9	33,2
B7szt	32,3	35,5	10,1	22,6	18,4	30,0
B8szt	37,9	44,1	10,2	26,1	20,6	36,4
Bszt	*50,4*	*29,2*	*20,4*	*20,0*	*31,6*	*27,9*

10. táblázat. A C változat eredményei (%-ban)

	Gimnázium (n = 57)		Szakközépiskola (n = 87)		Gimn. és szakközépisk. (n = 144)	
	átlag	*szórás*	*átlag*	*szórás*	*átlag*	*szórás*
C1szt	87,1	31,3	68,6	41,7	75,9	38,9
C2szt	40,4	32,0	30,3	30,3	34,3	31,3
C3szt	44,4	43,3	21,1	34,9	30,3	40,0
C4szt	17,8	22,8	8,8	11,1	12,3	17,2
C5szt	18,1	32,6	10,3	28,8	13,4	30,5
C6szt	25,8	34,4	11,8	24,2	17,4	29,4
C7szt	18,9	27,7	9,5	16,7	13,2	22,1
C8szt	14,5	25,0	4,9	13,7	8,7	19,5
Cszt	*28,4*	*22,3*	*16,6*	*15,3*	*21,3*	*19,2*

11. táblázat. A D változat eredményei (%-ban)

	Gimnázium (n = 59)		Szakközépiskola (n = 94)		Gimn. és szakközépisk. (n = 153)	
	átlag	*szórás*	*átlag*	*szórás*	*átlag*	*szórás*
D1szt	70,3	42,7	58,0	45,4	62,7	44,6
D2szt	50,5	39,2	18,5	26,8	30,8	35,6
D3szt	16,0	32,3	1,4	8,1	7,0	22,1
D4szt	39,4	37,1	15,7	28,3	24,8	33,9
D5szt	16,5	31,4	4,3	12,5	9,0	22,5
D6szt	29,9	39,5	11,7	22,8	18,7	31,5
D7szt	27,3	39,5	7,3	20,0	15,0	30,6
D8szt	12,2	23,3	2,5	9,1	6,2	16,8
Dszt	*28,4*	*24,7*	*10,4*	*9,9*	*17,3*	*19,3*

A tesztek mint mérőeszközök jellemzésére elsőként a reliabilitásokat számítottuk ki, hiszen az eredmények használhatósága szempontjából ez az egyik legfontosabb adat. A reliabilitásmutatók becslésére a *Cronbach-féle alfa koefficienst* használtuk. Tekintettel arra, hogy a reliabilitás populációfüggő, mind a három tanulócsoportban (G, SZ és GSZ) meghatároztuk a tesztváltozatok belső konzisztenciájáról tájékoztató mutatókat. A reliabilitásértékeket a 12. táblázatban közöljük.

12. táblázat. Az A, B, C és D tesztváltozat reliabilitása (Cronbach-α)

Teszt-változat	*Itemek száma*	*Reliabilitás*		
		Gimnázium	*Szakközépiskola*	*Gimn. és szakközépisk.*
A	45	0,96	0,92	0,96
B	45	0,96	0,94	0,97
C	38	0,95	0,91	0,94
D	46	0,96	0,85	0,95

Érdemes megjegyezni, hogy a tesztelés tantárgyi sajátosságai nyilvánulnak meg abban, hogy a szokásos 45 percre tervezett tesztek matematikából és fizikából többnyire nem hosszabbak 40–50 itemnél. Esetünkben ez jellemző (A/45, B/45, C/38, D/46).

A tesztfeladatok reliabilitását (Cronbach α) a 13. táblázatban mutatjuk be. Különösen alacsony értéket (0,14) kaptunk az *A* változat 7. (négy itemes) feladatánál a szakközépiskolások körében. Az okok pontosabb feltáráshoz további vizsgálódásra van szükség. Módunk van például annak ellenőrzésére, a feladat nehézségének milyen szerepe van abban, hogy a különböző képességű tanulókat nem lehet egymástól megbízhatóan elkülöníteni.

13. táblázat. A tesztfeladatokra kiszámított reliabilitásértékek (Cronbach-α)

Teszt feladat	*Itemek száma*	*Reliabilitás*		
		Gimnázium	*Szakközépiskola*	*Gimn. és szakközépisk.*
A1	2	0,78	0,79	0,81
A2	4	0,94	0,90	0,92
A3	7	0,95	0,92	0,94
A4	6	0,92	0,93	0,93
A5	7	0,96	0,90	0,94
A6	7	0,97	0,97	0,97
A7	4	0,85	0,14	0,74
A8	8	0,97	0,86	0,96
B1	3	0,93	0,95	0,95
B2	6	0,97	0,98	0,97
B3	4	0,96	0,89	0,94
B4	8	0,97	0,96	0,97
B5	6	0,97	0,84	0,95
B6	3	0,85	0,46	0,77
B7	7	0,90	0,88	0,90
B8	8	0,97	0,95	0,97
C1	3	0,92	0,89	0,90
C2	3	0,74	0,66	0,70
C3	3	0,86	0,84	0,86
C4	8	0,82	0,41	0,73
C5	6	0,93	0,97	0,95
C6	7	0,91	0,88	0,90
C7	4	0,75	0,45	0,66
C8	4	0,68	0,51	0,65
D1	2	0,85	0,84	0,84
D2	5	0,85	0,77	0,85
D3	7	0,95	0,83	0,95
D4	8	0,92	0,91	0,92
D5	4	0,87	0,51	0,81
D6	3	0,83	0,58	0,76
D7	8	0,96	0,91	0,95
D8	9	0,89	0,76	0,87

Példánkban a tanulók százalékos eloszlása: 2 pont 1,9%, 1 pont 16,2%, 0 pont 81,9% (n = 105; a feladatra 4 pont adható). Ami az itemeket illeti, a négy item közül az A7c esetében kaptak legtöbben (15 fő; 14,3%) 1 pontot. Itt az alternatív döntés arra vonatkozik, hogy a $v = \frac{s}{t}$ képlet *szerepel-e* a megoldásban: igen vagy nem? A formulát *felíró* 15 tanuló közül az A7a itemnél pusztán egy fő ért el 1 pontot, egyúttal az A7b itemre mindegyikük 0 pontot kapott. A tanulók „helyének” vizsgálata tovább árnyalja a képet: a 15 osztályból háromban található meg az említett 15 tanuló közül 12. Amennyiben ez a három osztály a mintánkban nem szerepelne, akkor a 4 itemet tartalmazó feladat reliabilitása javulna: a 82 fős mintán a Cronbach α 0,34 lenne.

A teszteredmények és a négy tanulócsoport összehasonlításához kiemelt osztályzatok kapcsolatait kutatva kézenfekvő a gondolat, hogy kiszámítjuk a változók közötti korrelációkat. A gimnáziumi, a szakközépiskolai és az egész mintára számított korrelációs együtthatók a 15. táblázatban találhatók.

15. táblázat. Az osztályzatok és a teszteredmények összefüggései (korrelációs együtthatók)

Minta	*Tantárgy*	*Teszteredmények*			
		Aszt	*Bszt*	*Cszt*	*Dszt*
G	Matematika	0,56***	0,59***	0,60***	0,33*
	Fizika	0,30*	0,52***	0,33*	0,15
	Irodalom	0,36**	0,46***	0,35**	-0,04
	Nyelvtan	0,51***	0,50***	0,29*	-0,14
	RTE	0,55***	0,66***	0,53***	0,13
SZ	Matematika	0,54***	0,38***	0,31**	0,37***
	Fizika	0,44***	0,43***	0,30*	0,45***
	Irodalom	0,46***	0,37***	0,34**	0,37***
	Nyelvtan	0,43***	0,31**	0,36**	0,44***
	RTE	0,60***	0,50***	0,45***	0,49***
GSZ	Matematika	0,59***	0,55***	0,50***	0,42***
	Fizika	0,45***	0,57***	0,40***	0,40***
	Irodalom	0,49***	0,54***	0,39***	0,21*
	Nyelvtan	0,52***	0,51***	0,39***	0,21*
	RTE	0,63***	0,67***	0,55***	0,39***

Megjegyzés: RTE a négy tantárgyi osztályzat átlagolásával kapott összesített mutató.
*: $p < 0{,}05$; **: $p < 0{,}01$; ***: $p < 0{,}001$.

Végül a feladatok körében végzett összefüggésvizsgálat eredményeit mutatjuk be. A feladatok szövegével (nyelvi elemeivel), továbbá struktúrájával kapcsolatos változók és a megoldási szint (százalékos teljesítménymutatók) viszonyát a Spearman-féle rangkorrelációs együttható segítségével közelítjük meg. A G, SZ és GSZ mintákon kapott értékeket a 16. táblázatban tüntettük fel. A változókhoz és feladatok reliabilitásához tartozó rangkorrelációs együtthatók a 17. táblázatból olvashatók ki.

16. táblázat. Rangkorrelációk a feladatok nyelvi elemeivel, struktúrájával kapcsolatos változói és a százalékos teljesítménymutató között

Változók	*Gimnázium*	*Szakközépiskola*	*Gimnázium és szakközépiskola*
F1	-0,59***	-0,63***	-0,63***
F2	-0,55**	-0,59***	-0,58***
F3	-0,59***	-0,61***	-0,61***
F4	-0,69***	-0,76***	-0,74***
F5	-0,01	-0,15	-0,08
F6	-0,52**	-0,55**	-0,54**
F7	-0,48**	-0,56**	-0,53**
F8	-0,35	-0,44*	-0,39*
F9	-0,09	-0,20	-0,13
F10	-0,06	-0,16	-0,11
F11	-0,17	-0,23	-0,20
F12	-0,34	-0,35*	-0,34
F13	-0,31	-0,31	-0,34
F14	-0,32	-0,30	-0,34
$F_{+}15$	-0,36*	-0,38*	-0,40*
$F_{+}16$	-0,74***	-0,73***	-0,76***
S1	-0,52**	-0,65***	-0,57**
S2	-0,03	-0,10	-0,08
S3	-0,48**	-0,62***	-0,54**
S4	-0,49**	-0,66***	-0,57**
S5	-0,51**	-0,70***	-0,59***
S6	-0,14	-0,21	-0,16
S7	-0,58***	-0,76***	-0,67***
S8	-0,49**	-0,65***	-0,56**
S9	-0,50**	-0,70***	-0,59**
S10	-0,49**	-0,66***	-0,56***
S11	-0,45**	-0,46**	-0,44*
S12	-0,20	-0,30	-0,24
S13	-0,31	-0,46**	-0,37*
S14	-0,05	-0,15	-0,09
S15	-0,32	-0,44*	-0,37*
S16	-0,31	-0,46**	-0,38*
FS1	-0,13	0,09	-0,06
$FS_{+}2$	-0,12	0,04	-0,07
$FS_{+}3$	-0,12	0,08	-0,05
$FS_{+}4$	-0,23	-0,06	-0,19

Megjegyzés: *: $p < 0,05$; **: $p < 0,01$; ***: $p < 0,001$.

17. táblázat. Rangkorrelációk a feladatok nyelvi elemeivel, struktúrájával kapcsolatos változói és reliabilitása között

Változók	*Gimnázium*	*Szakközépiskola*	*Gimnázium és szakközépiskola*
F1	0,15	-0,05	0,09
F2	0,15	-0,04	0,09
F3	0,12	-0,07	0,06
F4	0,17	-0,06	0,11
F5	0,36*	0,26	0,37*
F6	0,21	-0,01	0,15
F7	0,28	0,09	0,25
F8	0,18	0,07	0,17
F9	0,36*	0,15	0,29
F10	0,41*	0,37*	0,47**
F11	0,17	0,13	0,19
F12	0,31	0,20	0,27
F13	-0,25	-0,32	-0,26
F14	-0,32	-0,40*	-0,35
F_+15	-0,28	-0,36*	-0,29
F_+16	0,22	0,00	0,18
S1	0,20	-0,09	0,08
S2	0,08	0,08	0,07
S3	0,38*	0,10	0,34
S4	0,41*	0,12	0,37*
S5	0,36*	0,04	0,29
S6	0,51**	0,45**	0,52**
S7	0,14	-0,24	0,04
S8	0,39*	0,11	0,34
S9	0,37*	0,04	0,30
S10	0,41*	0,11	0,35
S11	0,24	0,08	0,18
S12	0,18	-0,03	0,11
S13	0,45*	0,21	0,42*
S14	0,29	0,07	0,23
S15	0,42*	0,20	0,40*
S16	0,39*	0,20	0,40*
FS1	-0,40*	-0,24	-0,40*
FS_+2	-0,30	-0,20	-0,31
FS_+3	-0,41*	-0,26	-0,42*
FS_+4	-0,34	-0,28	-0,34

Megjegyzés: *: $p < 0{,}05$; **: $p < 0{,}01$; ***: $p < 0{,}001$.

Az eredmények értelmezése

Legelőször a tesztelés eredményeivel (a mért adatokkal) foglalkozunk, majd rátérünk a vizsgált változók közti kapcsolatok ismertetésére.

Jelen esetben a kiértékelés és az értelmezés során fokozott figyelmet kell fordítanunk az adatok minőségére. A feladatok jellemzésére két (mérni kívánt) változót vezettünk be: a nehézséget becslő *százalékos teljesítménymutatót* és a *reliabilitást*. Mindkét mutató „*populációfüggő*”, függnek annak *a mintának tulajdonságaitól*, amelyen megállapítottuk őket. Meg kell tehát fontolnunk, hogy – a már említett *kényszer(helyzet)ből* eredő – eljárásunk (a négy tesztváltozat adatainak összeolvasztása) megfelel-e a *kívánalmaknak*.

A négy csoport „egyforma eséllyel” indult: a csoportosítás *randomizáció* (sorsolás) útján történt. Nem biztos, hogy ezzel kiegyenlített csoportokat kaptunk, ámde nem tüntettünk ki szempontokat, nem követtünk el szisztematikus hibát. Világos, egyes esetekben nagyon jó a csoportbeosztás, máskor kevésbé. Ezt célszerűnek tartottuk megvizsgálni *néhány fontosnak tartott tényező* segítségével. Csak el kellett döntenünk, hogy milyen „szempontokat” választunk ki, hiszen minden jelenséget egész sor tényező befolyásol azokon kívül is, amiket vizsgálunk (*Hajtman*, 1971).

Nézzük meg ezt a kérdést kicsit részletesebben. Ebben az esetben válasz kapható arra nézve, hogy van-e *lényeges különbözőség* az alkalmazható tudás szempontjából) a kérdéses minták között. A szöveges feladatokban közös, hogy olyan ismeretekről kell számot adniuk a tanulóknak, amelyekkel előzetes felkészülés nélkül is rendelkezniük kell. A tanulók releváns tudásának a megítéléséhez az iskolákban nyilvántartott, *az iskolai teljesítményeket hivatalosan bemutató adatokat* (az osztályzatokat) gyűjtöttük össze: a matematika és a fizika mellett, amely tárgyak tudására vizsgálatunk közvetlenül irányul, ezúttal felvettük az irodalom- és a nyelvtanjegyeket (tekintettel az *olvasási teljesítmény* irányító szerepére), továbbá ezeket a tárgyakat leginkább jellemző középértéket (a jegyek átlagát: RTE). Az osztályzatok természetes ingadozásai és pontatlanságai ellenére feltehető, hogy a jegyeket a *tudás* határozza meg. (A tudás terminust sajátos értelemben mint átfogó gyűjtőfogalmat használjuk.) Döntésünket megerősíti, ha a *vizsgálatban használt tesztek eredményeivel reprezentált tudás* és a *megválasztott jegyek* statisztikailag összefüggenek.

Várakozásunknak megfelelően a 15. táblázatban a korrelációs együtthatók (noha nem túl magasak) *majdnem mind* szignifikánsak. Érdekes módon a gimnazistáknál a *D* változat esetében (eltekintve a matematikajegytől) a kapott értékek túlságosan kicsik ahhoz, hogy belőlük a változók közti kapcsolatra lehessen következtetni: mindegyikre vonatkozóan $p > 0,05$. (Mindenesetre vizsgálatunkban *matematikai* szöveges problémákat szerepeltettünk.) Fontos aláhúzni, hogy *a középiskolai tanulók matematikai eredményessége és teszteredmények között pozitív jellegű összefüggések vannak.*

Már láttuk, a kiemelt változóink esetében a próbák nem adtak szignifikáns eredményeket. Ezzel voltaképpen készen volnánk: úgy tűnik, az egyszerű randomizációval nyert csoportok között nincs olyan „karakterbeli különbség”, amely döntően befolyásolhatja a vizsgálat kimenetelét.

Térjünk most rá az összefüggések elemzésére. Először a nyelvi jellemzők kapcsolatait tekintjük át, majd megnézzük a strukturális változók vélhetően befolyásoló hatását a szöveges feladatok megoldására. Eközben az eredmények további értelmezését segítendő, építünk a megelőző vizsgálatok adataira is. Mindez együtt segítheti egy teljesebb kép kialakítását.

Lepik (1990) leírja, hogy tanulmányában a *nyelvi változók* (linguistic variables) közül csupán a *szavak és élek aránya* (vizsgálatunkban FS1 jelöli) mutatott szignifikáns korrelációt a teljesítménnyel (helyes stratégiák alkalmazásával) ($r = 0,49$; $p < 0,01$). Ez az *expozícióban* (a probléma megfogalmazásában) az *információsűrűség* (*density of information*) szerepét mutatja: a problémahelyzet részletesebb, kimerítőbb leírása támaszt jelenthet a matematikai relációk felismeréséhez, egyszersmind megértéséhez. A szerző még megjegyzi, hogy bár vizsgálatában egyszer sem sikerült kimutatni, *Jerman* és *Rees* (1972) adatai szerint a *hosszúsággal kapcsolatos változók* (*problem length variables*) igénybe vehetők annak előrejelzésére, hogy a tanulók milyen stratégiát használnak az adott (matematikai) szöveges problémában.

Ugyanakkor a *megoldási idő* tekintetében már mutatkoztak összefüggések. A legmagasabb korrelációt ($r = 0,55$; $p < 0,01$) *Lepik* a *szószámnál* (nálunk F3) tapasztalta: ha a probléma megfogalmazásában a szavak száma nagyobb volt, a megoldáshoz több időre volt szükség. Ami a többi változót illeti, a pozitív korrelációs együtthatók között még 5 szignifikáns akadt: az együtthatók – a mi jelöléseinkkel – az F1, F2, F4, F12 változókhoz (mind szignifikáns a $p = 0,01$ valószínűségi szinten is) és az F14 változóhoz (amelyre nézve $p < 0,05$) tartoznak. Ezekre az eredményekre hivatkozva megemlítjük, hogy e tényezők hatása külön figyelmet érdemel *egy problémahelyzetben*, ha a feladatra *időkorlát* adott (*Wood*, 1991). Kiemelésre méltó még az is, hogy *megértést kifejező hamis önvallomást* (*illusion of knowing*) válthat ki a *szöveg hosszúsága* (*paragraph effect*) (*Glenberg*, *Wilkinson* és *Epstein*, 1992).

A dolgot tovább bonyolítja, hogy meglepő módon a legalább 6 betűs szavak száma és relatív gyakorisága *negatív* szignifikáns összefüggésben volt a megoldási idővel. (A jelöléseinket felhasználva: F6 esetében $r = -0,38$, $p < 0,05$, F9-nél pedig $r = -0,43$, $p < 0,01$). Magyarázatul *Lepik* azt hozza fel, hogy a szóban forgó szavak jórészt a tanulók által jól ismert, a megoldást elősegítő (ezenképpen a megoldási időt csökkentő) matematikai terminusok lehettek. A végén pedig úgy foglalja össze az elemzését, hogy a szöveges problémák megoldásakor a szöveg megfelelő *olvashatósága* (*readability level*) a sikerhez szükséges, de nem elégséges követelmény (*Austin* és *Lee*, 1982, idézi *Lepik*, 1990).

A mi vizsgálatunkban a *teljesítmény szempontjából* feltárt összefüggéseket látva elmondhatjuk, hogy esetünkben a nyelvi változók nagyobb súllyal jelennek meg. De azt a körülményt nem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy a mi mintáinkban az FS1 és a százalékos teljesítménymutató közötti korrelációs együtthatók nemcsak kicsik, hanem még csak nem is szignifikánsak. Érdemes arra is felfigyelni, hogy a két iskolatípus összefüggésrendszere *lényegében* (az F8 és az F12 változókat nem számítva 8 kapcsolat) ugyanúgy alakult (16. táblázat). A legszorosabb összefüggések mindegyik mintán az F4 és az $F_{+}16$ esetében lelhetők ($r_S < 0$, $0,69 < |r_S| < 0,76$, $p < 0,001$). Megfigyelhető az a tendencia, hogy a *szöveg terjedelmével* kapcsolatos változók nagyobb értékei előrevetítik az alacsonyabb teljesítményt. Ilyen például a karakterek száma (F1, F2 és $F_{+}16$), a szavak száma (F3 és F4), a hosszú szavak száma (F6 és F7, lásd még F8), az átlagos mondathossz a „szavak" szintjén ($F_{+}15$), valamint a szakközépiskolásoknál a mondatok száma (F12) (16. táblázat).

A vizsgálat kezdetén eleve abból a feltevésből indultunk ki, amit a kapott eredmények alátámasztanak, hogy a feladat *szövege* a szöveges egyenletek megoldását befolyásoló tényező: az olvasandó szövegek különböző nehézségűek lehetnek. Az áttekinthetetlen, összebonyolított megfogalmazás esetén megértési (szövegértési) problémák merülhetnek fel. A szövegértés erősen függ a szövegek fajtájától is: a tanulók a történeteket könnyű, míg a tényleírásokat nehéz szövegnek tartják (*Tarkó*, 1999). Ebben a megvilágításban megérthetjük, hogy ekkor a megoldáshoz több időre lehet szükség. Sőt ilyen körülmények között a tanuló *időzavarba* kerülhet: kapkodni kezd, bizonytalanná válhat, s ekképp hibát hibára halmozhat. Számos tanuló rögtön az utalószavak kereséséhez kezd anélkül, hogy alaposan végigolvasná a feladatot (*Ben-Zeev*, 1998).

Eredményeink emlékeztetnek a közoktatás általánosan elfogadott felfogására, miszerint *az oktatás eredményessége szempontjából az egyik legfontosabb tudáselem az olvasási képesség*: a tanulók olvasni tudása és olvasásmegértésének fejlettsége minden más tanulási eredményre közvetlen hatással van (*Vidákovich* és *Cs. Czachesz*, 1999). Ahogy az előző részben láttuk, mind az irodalom-, mind a nyelvtanjegyek kapcsolatba hozhatók a teszteredményekkel. Annak érdekében, hogy megtudjuk, milyen tényezők állhatnak az összefüggések mögött, praktikus elkülöníteni a jó és a gyenge olvasónak tartott tanulók *olvasási magatartását*. Természetesen nem vállalkozhatunk a működő képességek részletes feltárására, az alábbiakban mindössze hangsúlyozni szeretnénk az olvasási nehézségeknek az olvasott szövegek megértésében játszott szerepét (minderről részletesebben *Tarkó*, 1999; *Solso*, 1988).

A jó és a gyenge olvasók közötti különbség tipikus eseteként említhetjük, hogy a *gyakorlott olvasók* figyelme a szöveg jelentésére összpontosul. Kutatások bizonyítják, hogy a *gyengén olvasók* a szövegösszefüggések megtalálása érdekében nem futják át, nem olvassák el újra a szöveget, az információkat nem integrálják, nem következtetnek, és jobbára nem alkalmazzák a gyakorlott olvasókra jellemző stratégiákat. S ez nem csupán olvasás kérdése: a *sikertelen tanulók* az újraolvasásbeli többlet-erőfeszítéseiket jelentős mértékben a számokra fordítják, a sikeres tanulók pedig a változók neveire. Ez összhangban van azzal a már idézett állítással, hogy a sikertelen tanulók inkább közvetlen transzlációs stratégiához folyamodnak, míg a sikeresek nagy valószínűséggel a problémamodellező stratégiát alkalmazzák (*Mayer* és *Hegarty*, 1998).

Az olvasás *minősége* (gyengesége illetve gyakorlottsága) életkor szerint is differenciálódik. Számolhatunk azzal, hogy a fiatalabbak nem alkalmaznak stratégiákat, nem tudják megkülönböztetni a lényegi és a szó szerinti felidézést. Ezek és hasonló kérdések gyorsan elvezetnek ahhoz a konklúzióhoz, hogy a *visszaemlékezés* elemzése egy további hasznos megközelítési módot jelent a matematikai megértés kutatásában. Például *Mayer* és *Hegarty* (1998) kutatási beszámolója rámutat az emlékezés szerepére a szöveges problémák megoldásában.

Saját adataink alapján – a középiskolát illetően – végeredményben azt állíthatjuk, hogy azoktól a feladatoktól várható magasabb reliabilitás, amelyek megfogalmazásában a legalább 9 betűs szavak relatív gyakorisága (F10) nagyobb (G: $r_S = 0{,}41$, $p < 0{,}05$; SZ: $r_S = 0{,}37$, $p < 0{,}05$; GSZ: $r_S = 0{,}47$, $p < 0{,}01$). Más szóval az ilyen feladatok általában megbízhatóbban különítik az eltérő képességű *középiskolai* (9. osztályos) tanulókat. A gimnazisták körében az *átlagos szóhossz* (F5) és a legalább 6 betűs szavak relatív gyakorisága (F9) „húzza magával" a megbízhatóságot (mind a kettő esetében: $r_S = 0{,}36$, $p < 0{,}05$). Mindez pedig arra utal, hogy a hosszabb szavak (többihez viszonyított) szaporításával alkalmasint *erősebben* szelektálhatunk. A szakközépiskolásoknál a reliabilitásra az átlagos mondathossz a *szavak* szintjén (F14 és $F_{+}15$) ad információt. Itt a párba állított változók között ellentétes, negatív korrelációs összefüggések találhatók: F14 és Cronbach α: $r_S = -0{,}40$, $p < 0{,}05$, meg $F_{+}15$ és Cronbach α: $r_S = -0{,}36$, $p < 0{,}05$. Ugyanakkor jó tudni, hogy a középiskolásokat (G, SZ és GSZ) tekintve az $F_{+}15$ a százalékos teljesítménymutatóval negatív lineáris kapcsolatban van (16. táblázat).

Ezzel kapcsolatban felvethető, hogy az átlagos nehézségű itemek általánosságban növelik a reliabilitást, ekkor várható a legjobb elkülönítés (*Schelten*, 1980; *Horváth*, 1993). A tesztszerkesztés folyamatában jól figyelembe vehető szabály, hogy a homogén tesztitemek nehézsége 0,2 és 0,8 közt mozogjon, a heterogén tesztek itemjeinek nehézsége pedig 0,5 körül legyen (*Horváth*, 1997). (Persze a teszt céljától függ, hogy milyen nehézségű itemeket választunk.)

A továbbiakban a *strukturális változók* szerepével foglalkozunk. Először újfent *Lepik* (1990) eredményeit mutatjuk be röviden. Számításai szerint a *helyes megoldásmenet előfordulásához* fűződő kapcsolatokat illetően a 16 korrelációs együtthatóból 10 volt szignifikáns (ld. S3, S4, S7, S8, S9, S10, S11, S13, S15 és S16, amelyekre nézve $p < 0{,}05$). Sőt, e tíz *negatív* együttható közül öt szignifikáns volt a $p = 0{,}01$ szinten is (S3, S4, S8, S9 és S10). A legmagasabb abszolút értékek az S3, S4 és S8 változókhoz tartoztak ($0{,}54 < |r| < 0{,}55$): a segédismeretlenek, a meghatározandó mennyiségek, valamint a formulák és egyenletek számához.

A *megoldási idővel* szintén 11 mutató (S2, S5, S7, és S9–S16) volt *pozitív* korrelációban. Hozzátehető, hogy itt az összes talált kapcsolatot erős szignifikanciával ($p < 0{,}01$) ki lehetett mondani. A legerősebb összefüggés a kérdezett mennyiségek számával (S2) mutatkozott ($r = 0{,}62$). Végül *Lepik* a két teljesítménymutatót együttesen tekintve a következő 6 változót emelte ki: S7, S9, S10, S11, S15 és S16.

Elemzésünket most a strukturális változók és a *százalékos teljesítmény* kapcsolataira vonatkozó saját eredményeinkkel és a belőlük levonható következtetésekkel folytatjuk. Vizsgálatunk összhangban *Lepik* vizsgálatából megismert eredményekkel (és más elemzésekkel) megerősíti, hogy a szöveges feladatok *szerkezetének* (struktúrájának) kérdésköre fontos kontextust kínál a *nehézségek* tanulmányozásához: a középiskolában (GSZ) 12 negatív korrelációs összefüggést tapasztaltunk ($p < 0{,}05$). A *16. táblázatból* látjuk, hogy 8 esetben $p < 0{,}01$, ráadásul ebből háromra vonatkozóan $p < 0{,}001$. Figyeljük meg, hogy a négy kivétel (S2, S6, S12 és S14) *Lepiknél* ugyancsak szerepelt. Érdekes, hogy a gimnazista mintán az S13, S15 és S16 nem árulkodik a teljesítményekről.

Esetünkben a nehézségek legfőbb magyarázó elvének az egyenletek száma (S7) tekinthető (G, SZ, és GSZ: $r_S < 0$, $0{,}58 < |r_S| < 0{,}76$, $p < 0{,}001$). Emellett a megadott és a meghatározandó mennyiségek száma (S5) úgyszintén jól jelzi a megoldások színvonalát (G, SZ, és GSZ: $r_S < 0$, $0{,}51 < |r_S| < 0{,}70$, $p < 0{,}01$). Arra gondolhatunk, hogy a „bonyolultabb feladatok" megoldásában az egyik kritikus tényező a *problématér* mérete (a mozgások lehetséges száma a problémában; *Szabó*, 1997); mi több, a munkamemóriának is megvannak a maga korlátai.

Ezek után vegyük szemügyre a strukturális változók és a reliabilitás közötti összefüggéseket (17. táblázat). Azonnal látható, hogy e változócsoport együtthatói között több a szignifikáns, mint a nyelvi változók esetében. Végül is a struktúra a matematika egyik fő jellemzője: a tények kevésbé fontosak, mint más tudományokban, másrészről a tények közötti kapcsolatok, a kapcsolatok közötti kapcsolatok, így az egész struktúra, sokkal fontosabb (*Dreyfus* és *Eisenberg*, 1998).

Még határozottabban érzékelhető a két iskolatípus adatainak eltérése: míg a gimnazistáknál tízszer (további eseteket jelent az FS1 és $FS_{+}3$ változókkal kapcsolatos két r_S érték), a szakközépiskolásoknál pusztán egyszer mondható ki a szignifikancia (állapítható meg kapcsolat). Ennek számos oka lehet. (A 13. táblázat adatai alapján nem hozhatjuk szóba, hogy a szakközépiskolások részmintáján esetleg *túl kicsi* a reliabilitás varianciája.)

Úgy tűnik, a megbízhatóság jellemzésére legfőképp a megoldáshoz szükséges formulák száma (S6) használható fel (G, SZ, és GSZ: $0{,}45 < r_S < 0{,}52$, $p < 0{,}01$). Minél több képletet kell *ismerni* (a helyes felírások pontértékét 1-gyel vettük figyelembe), annál eltérőbben reagálnak a tanulók a feladatra, és annál jobban lehet a feladattal köztük különbséget tenni.

Ezen a ponton nem kerülhetjük meg a nemzetközi és hazai felmérések megállapítását: a tanulók javarészben jól megtanulják a tananyagot, és képesek annak reprodukálására, amennyiben azt olyan kontextusban kérik tőlük, amilyenben elsajátították. Persze az ismeretek mennyiségi növekedése nem vonja automatikusan maga után a mélyebb megértést, a tudás új helyzetekben való alkalmazhatóságát (*Csapó* és *Korom*, 1998). Érdemes ismét megjegyezni, hogy a formulák száma (S6) és a százalékos teljesítménymutató „*együttváltozása*" nem általánosítható, vagyis nagy valószínűséggel az általunk a G, SZ és GSZ mintákon észlelt kapcsolatok a véletlen (a mintavételi ingadozás) hatásának tulajdonítható (16. táblázat).

Összegzés

A gyakorlati kérdések megoldásában a matematikai eszközök, módszerek egyre jelentősebb szerephez jutnak. Ehhez azonban a *feladatot* vagy *problémát* át kell fogalmazni a „matematika nyelvére". Gyakorta tesszük ezt meglehetősen egyszerű esetekben, még ha történetesen nem is veszünk róla tudomást. Ugyanakkor a gondot többnyire nem a matematikai művelet(ek) jelenti(k), hanem annak felismerése, hogy az adott *problémahelyzetben* milyen művelet(ek)re van szükség. A viszonyokat kifejező szavak értelmezésének tanítása, a tanulók felkészítése a különböző adatok közötti összefüggések keresésére *többek között* a matematika tanítása során, szöveges egyenleteken keresztül történhet.

Valóban, a *Szöveges feladatok* tesztekben nyújtott teljesítmények (így a szövegesfeladat-megoldó készségek fejlettsége) és a matematikai eredményesség között összefüggéseket találtunk a középiskolában. Tudjuk, a tanulók tanulmányaik során sok időt töltenek szöveges egyenletek megoldásával, és nem csak matematikaórákon (lásd például fizika). Nem mondható, hogy ezek feladatmegoldó órák (sőt tárgyak) nem fejlesztenek készségeket, képességeket.

Csakhogy a *szöveges egyenletek megoldása* (például a középiskolai matematikaoktatásban) annyira megszokott kifejezéssé válhat, hogy az igazi lénye és célja szinte elhalványodik (*Hajnal* és *Némethy*, 1989). A probléma abban rejlik, hogy esetenként a tanórákon nem derül ki, hogy ebben a tananyagrészben szereplő feladatok megoldása milyen általánosabb gondolkodásfejlesztő célokat szolgál. Utalhatunk arra, hogy empirikus vizsgálatok eredményei szerint kevés a kapcsolat az egyes tantárgyak között, és szinte nincs összefüggés az iskolában tanultak és a hétköznapi élet között sem (*Csapó* és *B. Németh*, 1995; *B. Németh*, 1998). Egyszóval nem kap figyelmet a transzfer.

De egyáltalán *milyen* matematikai szöveges problémákkal találkozhatnak a tanulók? S ez még nem minden. Érdemes azon is töprengeni, hogy a tanítás akkor lehet hatékony, ha figyelembe veszi a tanuló mindenkori gondolkodási sajátosságait. Ezért foglalkoztunk ebben a kutatásban a szöveges feladatok minőségével, jóságával (néhány jellemzőjével) is.

Mivel a kérdésekre adandó válaszok gondolkodási feladatokká válnak, vizsgálatunkban a *probléma* (a feladat) és a *megértés*, *megoldás* (a teljesítmény) természetesen összefonódik egymással. Ami a tanítási gyakorlatot illeti, nemcsak a *tananyagot* kell ismernünk, hanem *valami* (lehetőleg pontos) képpel kell rendelkeznünk arról is, hogy milyen természetű az a tudás, milyen jellegűek azok a rendszerek, amelyek a tanulók pszichikumában kialakulnak (*Csapó*, 1993; *Majoros*, 1992).

A problémamegoldás irodalmában meg szokás különböztetni a problémamegoldási eljárás két fő jellegzetességét: a tartalmi és a strukturális tényezőkhöz köthető *reprezentációt* és a *megoldást*. Így a szöveges feladatok tanulmányozásakor abból indultunk ki, hogy *a legtöbb tanulónak nagyobb nehézséget okoz egy célravezető problémareprezentáció megteremtése, mint a megoldási eljárás végrehajtása*. Ez azt sugallja, hogy a *sémák* használata a sikeres teljesítmény fontos eleme. És ismét: a matematikai szöveges problémák sémaszerkesztése felöleli a helyes számolás képességét, de olyan tényezők is befolyásolják, mint a szemantika és a nyelv (*Ben-Zeev*, 1998).

Minthogy a nagy gyakoriságú problémák több jól képzett sémával kapcsolódnak, a bevezetőben különös figyelmet kapott a tankönyvekben található feladatok osztályozása, a fontosabb (gyakoribb) problématípusok azonosítása. Áttekintésünkben három lényeges szempontot emeltünk ki, (1) a *tartalom*, (2) az *általánosítás* (egyedek – halmazok, paraméterek) és (3) az *absztrahálás* (konkrét dolgok – absztrakt dolgok) aspektusát.

Annak érdekében, hogy megtudjuk, milyen tényezők állhatnak a matematikai szöveges feladatok esetében elért teljesítmények mögött a középiskolában, egy szakirodalomból átvett eljárást használtunk. *Lepik* (1990) módszerét követve az általunk kiválasztott (egyszerű „mozgási") feladatokat *nyelvi* és *szerkezeti elemekre* vonatkozó mutatókkal jellemeztük. Az új felmérést egyrészt a teljesítménymutatók *populációfüggése* indokolja. Másrészt mi a teljesítmény mérésére a *százalékos teljesítménymutatót* használtuk, azaz a feladatok értékelésekor az iskolai gyakorlatba jobban beleillő pontozási rendszerhez folyamodtunk. Harmadsorban *Lepik* rendszere alapján öt újabb változót vettünk fel, valamint előtérbe állítottuk a *megbízhatóság* szempontját.

Ami a korrelációs technikával végzett összefüggés-vizsgálatunk eredményeit illeti, statisztikai adatokkal is sikerült alátámasztani, hogy a nyelvi változók összefüggésbe hozhatók a teljesítménnyel. Érdekes és életközeli, hogy némely (a szöveg terjedelmével kapcsolatos) változó magasabb értékeiből előre sejthető a gyengébb teljesítmény. Adataink alapján azonban nem szerencsés máris messzemenő következtetéseket levonni. Például a *több szó*, a feladathelyzetben *több mennyiséget* (és így összetettebb szerkezetet) jelenthet. A jelenség alapos leírásához további vizsgálatok ajánlatosak. Mindamellett a feltárt tendenciák és kapcsolatok jelentőségét abban látjuk, hogy *Lepik* pusztán egy alkalommal tapasztalt (ilyen jellegű) szignifikáns korrelációs viszonyt (ld. a szavak és élek arányánál FS1).

Nem teljesen váratlan eredmény, hogy a strukturális változók szorosan kapcsolódnak a feladatmegoldás eredményességéhez: *Lepik* úgyszintén észlelt hasonló kapcsolatokat. Mondhatjuk ezt akképpen is, hogy a szöveges feladatok megoldása a szó szoros értelmében attól függ, hogy a tanulók értik-e a problémahelyzetet: azonosítják a változókat, felismerik a matematikai összefüggéseket. Ezekben az esetekben persze azt feltételezzük, hogy a megoldó annak a feladatnak a megoldásába fog bele, amit a számára kitűztek: olvasási készsége van olyan fejlett, hogy a feladat (esetleg bonyolult) szövegét pontosan értelmezheti.

Végül szeretnénk a figyelmet felhívni arra, hogy a *feladatok reliabilátására* következtethetünk (a nyelvi változókat illetően) a legalább 9 betűs szavak relatív gyakoriságából. Fontosnak tartjuk, hogy mindkét iskolatípusban megfigyelhető volt az összefüggés a formulák (szükséges, *alkalmazandó* képletek) számával. Fontosnak tartjuk, hogy a gimnáziumi mintán több szignifikáns korreláció mutatkozott a strukturális változókkal. Ugyanakkor meglepő, hogy a szakközépiskolai mintára nézve nem ez a helyzet. Ez utóbbi eredmény jelzi egyben azt is, hogy az eredmények interpretálásakor egy sereg más tényezőt is mérlegelni kell. Valószínűnek tartjuk, hogy nem lehet mindenütt érvényes válaszokat adni. Amit a tesztfejlesztésekhez javasolhatunk, az a bemutatott összefüggések végiggondolása. De a teljes változórendszer is hasznos lehet, relatíve tág mozgásteret biztosít a hibásnak tűnő feladatok elemzésekor.

Szinte közhely, hogy a szöveges feladatok megoldásának tudása végtelenül sok valósággal azonos szerkezetű, ámde elütő szövegű és más számértékeket tartalmazó feladattal vizsgálható. Joggal gondolható, hogy mindegyik nagy pontossággal ugyanazt méri. De azért egy-egy feladattal lehet valami baj: a jó tanulók, akik a kitűzött *hasonló* feladatok többségét jól oldják meg, *bizonyos* feladatokat elrontanak. Vizsgálatunk egyik tanulsága az, hogy ilyen esetekben (rendszerint rövid elemzéssel) kiderülhet, hogy ezek a feladatok rosszul vannak *megfogalmazva*. Előfordulhat például, hogy egy szöveges feladat teszt nem azt méri, aminek a mérésére kidolgozták: ha a szövege túlságosan *bonyolult*, az eredményekben nem tükröződik a releváns matematikai készségek fejlettsége. Ez teszt valójában azt méri, hogy a tanulók mennyire jól értik meg a feladatok szövegét, azaz milyen az olvasási készségük (*Csapó*, 1993).

Befejezésül hangsúlyozzuk, a szöveges feladatok tanításának kudarca az lehet, ha az iskolai évek alatt a tanulók azt tanulják meg, hogyan építhetnek néhány probléma esetén egy közvetlen transzlációs modellre; vagyis kimarad a problémák reprezentálásának megtanulása (*Mayer* és *Hegarty*, 1998). Úgy véljük, felidézhető *Ginsburg* (1998. 199. o.) intelme: a matematikaoktatásnak nem kellene magában foglalnia annak a hitnek a propagálását, hogy a matematika az a tantárgy, amelyben az egyéntől azt követelik meg, hogy gyorsan, gondolkodás nélkül produkálja a helyes választ, és a matematika valami trükkös, becsapós vagy önkényes dolog.

Irodalom

Anderson, J. R. és Thompson, R. (1989): Use of analogy in a production system architecture. In: Vosniadou, S. és Ortony, A. (szerk.): *Similarity and analogical reasoning.* Cambridge University Press, Cambridge.

Andrásy Tiborné, Czeglédy Istvánné, Czeglédy István, Hajdú Sándor és Novák Lászlóné (1989): *Matematika 6*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Austin, J. D. és Lee, M. A. B. (1982): Readability and mathematics text item difficulty. *School Science and Mathematics*, **82**. 284–290.

B. Németh Mária (1998): Iskolai és hasznosítható tudás: a természettudományos ismeretek alkalmazása. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest.

Baranyi Károly (1992): *A fizikai gondolkodás iskolája. 1. kötet. Mechanika*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Báthory Zoltán (1989): Tanulás és hatékonyság. *Pedagógiai Szemle*, 1. sz. 3–18.

Beke Manó (1900): Typikus hibák a mathematikai tanításban. *Magyar Paedagogia*, **9**. Másodlagos forrásból (ismeretlen).

Ben-Zeev, T. (1998): Amikor a hibás matematikai gondolkodás majdnem olyan, mint a helyes: a racionális hibák. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest.

Berger, D. E. és Wilde, J. M. (1987): A task analysis of algebra word problems. In: Berger, D. E., Pezdek, K. és Banks, W. P. (szerk.): *Applications of cognitive psychology: Problem solving, education, and computing*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale N. J.

Bíró Imre (1979): Egyenletek, egyenletrendszerek megoldása. In: Fekete Gyula (szerk.): *Felvételi kalauz matematikából: Feladatgyűjtemény egyetemi és főiskolai felvételi vizsgákra önállóan készülőknek.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Borasi, R. (1986): On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, **17**. 125–141.

Bordens, K. S. és Abbott, B. B. (1991): *Research design and methods: A process approach.* Mayfield Publishing Company, London.

Bransford, J. D. és Stein, B. S. (1993): *The IDEAL problem solver*. (2. kiadás) Freeman, New York.

Bransford, J. D., Zech, L., Schwartz, D., Barron, B. és Vye, N. (1998): Középiskolai tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése: kutatási tapasztalatok. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest.

Brown, S. I. és Walter, M. I. (1983): *The art of problem posing*. The Franklin Institute Press, Philadelphia.

Brugman, G. M. (1995): The discovery and formulation of problems. *European Education*, **27**. 1. sz. 38–57.

Cardelle és Elawar, M. (1994): Effects of metacognitive instruction on low achievers in mathematics problems. *Teaching & Teacher Education*. **11**. 1. sz. 81-95.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. és Glaser, R. (1981): Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, **5**. 2. sz. 121–152.

Czapáry Endre (1986): *Tanári kézikönyv a szakközépiskolák I. és II. osztályos matematika tananyagának tanításához*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Csapó Benő (1992): *Kognitív pedagógia*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Csapó Benő (1993): Tudásszintmérő tesztek. In: Falus Iván (szerk.): *Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe*. Keraban Kiadó, Budapest.

Csapó Benő (1998): Az iskolai tudás felszíni rétegei: mit tükröznek az osztályzatok? In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest.

Csapó Benő és B. Németh Mária (1995): A természettudományos ismeretek alkalmazása: mit tudnak tanulóink az általános és a középiskola végén? *Új Pedagógiai Szemle*, 8. sz. 3–11.

Csapó Benő és Korom Erzsébet (1998): Az iskolai tudás és az oktatás minőségi fejlesztése. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest.

Csengeri Pintér Péter (1981): *Mennyiségek, mértékegységek, számok, SI*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Cser Andor (1972): *A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Dezső Ágnes és Édes Zoltán (1997): *Középiskolai matematikai lexikon.* Corvina Kiadó Kft., Budapest, 9–12.

Dobi János (1998): Megtanult és megértett matematikatudás. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest.

Doblaev, L. P. (1957): Thought processes involved in setting up equations. *Izvestiia*, **80**. 175–233.

Dreyfus, T. és Eisenberg, T. (1998): A matematikai gondolkodás különböző oldalairól. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest.

Faragó László (1960): *Szöveges feladatok megoldása egyenlettel*. Budapest.

Fischban, E. (1982): Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*. 3.sz. 9–24.

Fisher, R. (1999): *Hogyan tanítsuk gyermekeinket tanulni?* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Fung Lin Ng Li (1990): The effect of superflouos information on children's solution of story arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, **21**. 509–520.

Fuson, K. C., Fraivillig, J. L. és Burghardt, B. H. (1992): Relationships children construct among English number words, multiunit base–ten clocks, and written multidigit addition. In: Campbell, J. J. D. (szerk.): *The nature and origins of mathematical skills*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.

Füleki Lászlóné (1996, szerk.): *Matematika feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Gimes Györgyné (2000, szerk.): *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Ginsburg, H. P. (1998): Toby matekja. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest.

Glenberg, A. M., Wilkinson, A. C. és Epstein, W. (1992): The illusion of knowing: Failure in the self–assessment of comprehension. In: Nelson, T. O. (szerk.): *Metacognition: Core readings*. Allyn and Bacon, Boston.

Gonzales, N. A. (1994): Problem posing: A neglected component in mathematics courses for prospective elementary and middle school teachers. *School Science and Mathematics,* **94**. 2.sz. 78–84.

Graeber, A. O. (1994): Problem solving: Managing it all. *The Mathematics Teacher*, **87**. 3. sz. 195–199.

Greeno, J. G. (1991): A view of mathematical problem solving in school. In: Smith, M. U. (szerk.): *Toward a unified theory of problem solving: Views from the content domains*. LEA, Hillsdale.

Gyetván Ferenc és Varga József (1992*): Matematika I. Felkészítő, teszt- és segédkönyv felvételizők és érettségizők számára*. ÉK Sorozat, Pécs.

Hajnal Imre és Némethy Katalin (1989): *Tanári kézikönyv a gimnázium I-II. osztályos matematikatankönyveihez*, Tankönyvkiadó, Budapest.

Hajnal Imre és Némethy Katalin (1992): *Matematika I.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Hajnal Imre, Nemetz Tibor, Pintér Lajos és Urbán János (1982): *Matematika (fakultatív B változat) IV. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Hajtman Béla (1971): *Bevezetés a matematikai statisztikába*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Halász Gábor (2000): Az oktatás minősége és eredményessége. In: Halász Gábor és Lannert Judit (szerk.): *Jelentés a magyar közoktatásról 2000*. Országos Közoktatási Intézet, Budapest.

Hinsley, D. A., Hayes, J. R. és Simon, H. A. (1977): From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. In: Carpenter, P. A. és Just, M. A. (szerk.): *Cognitive processes in comprehension.* Erlbaum, Hillsdale. N.J.

Horváth György (1993): *Bevezetés a tesztelméletbe*. Keraban Kiadó, Budapest.

Horváth György (1997): *A modern tesztmodellek alkalmazása*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Jerman, M. és Rees, R. (1972): Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems. *Educational Studies on Mathematics*, 4. sz. 306–323.

Karácsony Rezső (1994): *Fizikai feladatok és tévedések*. MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged.

Kaufmann, A. (1982): *A döntés tudománya: Bevezetés a praxeológiába.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Kiessling, G. és Körner, W. (1985): *Hogyan oldjunk meg fizikafeladatokat?* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Kilpatrick, J. (1987): Problem formulating: Where do good problems come from? In: Schoenfeld, A. H. (szerk.): *Cognitive science and mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Kontra József (1996): A probléma és a problémamegoldó gondolkodás. *Magyar Pedagógia*, **96**. 4. sz. 341–366.

Kontra József (1999): A gondolkodás flexibilitása és a matematikai teljesítmény. *Magyar Pedagógia*, **99**. 2. 141–155.

Kontra József (2000): A kreativitás és a matematikai teljesítmény minősítő értékelése. *Magyar Pedagógia*, **100**. 3. sz. 249–273.

Kósa András (1994): *Vírusok a matematikában*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Kosztolányi József, Mike János, Palánkainé Jakab Ágnes, Szederkényi Antalné és Vincze István (2000): *Matematika: Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek*. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged.

Laborde, C. (1990): Language and mathematics. In: Nesher, P. és Kilpatrick, J. (szerk.): *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lepik, M. (1990): Algebraic word problems: The role of linguistic and structural variables. *Educational Studies in Mathematics*, **21**. 83–90.

Low, R. és Over, R. (1990): Text editing of algebraic word problems. *Australian Journal of Psychology*, **42**. 1. sz. 63–74.

Lukács Ernőné és Rábai Imre (1971): *Feladatok és megoldások*. Gondolat Kiadó, Budapest.

Majoros Mária (1992): *Oktassunk vagy buktassunk? A tipikus matematikai hibák mögött rejlő gondolkodási mechanizmusok*. Calibra Kiadó, Budapest.

Mayer, R. E. (1982): Different problem–solving strategies for algebra word and equation problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*. **8**. 5. sz. 448–462.

Mayer, R. E. és Hegarty, M. (1998): A matematikai problémák megértésének folyamata. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó Kft., Budapest.

Mayer, R. E., Larkin, J. H. és Kadane, J. B. (1984): A cognitive analysis of mathematical problem-solving ability. In: Sternberg, R. (szerk.): *Advances in the psychology of human intelligence*. Lawrance Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Mayer, R. E., Lewis, A. B. és Hegarty, M. (1992): Mathematical misunderstandings: Qualitative reasoning about quantitative problems. In: Campbell, J. J. D. (szerk.): *The nature and origins of mathematical skills*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.

Miller, K. F. (1992): What a number is: Mathematical foundations and developing number concepts. In: Campbell, J. J. D. (szerk.): *The nature and origins of mathematical skills*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.

Miller, K. F. és Parades, D. R. (1998): Óriások vállán: a kulturális eszközök és a matematikai fejlődés. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest.

Molnár József (1967): *Az algebra és az elemi függvények tanítása*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Moses, B., Bjork, E. és Goldenberg, E. P. (1990): Beyond problem solving: Problem posing. In: Cooney, T. J. és Hirsch, C. R. (szerk.): *Teaching and learning mathematics in the 1990s.* 1990 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Mosonyi Kálmán (1972): *Gondolkodási hibák az általános iskolai matematikaórákon*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Nagy József (1985): *A tudástechnológia elméleti alapjai*. OOK, Veszprém.

Novick, L. R. (1992): The role of expertise in solving arithmetic and algebra word problems by analogy. In: Campbell, J. I. D. (szerk.) *The nature and origins of mathematical skills*. North-Holland, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.

Novick, L. R. és Holyoak, K. J. (1991): Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, **17**. 398–415.

Pierce, K. A., Duncan, M. K., Gholson, B., Ray G. E. és Kamhi, A. G. (1993): Cognitive load, schema acquisition, and procedural adaptation in nonisomorphic analogical transfer. *Journal of Educational Psychology*, **85**. 1. sz. 66–74.

Pollak, H. O. (1987): Cognitive science and mathematics education: A mathematician's perspective. In: Schoenfeld, A. H. (szerk.): *Cognitive science and mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Pólya György (1979): *A problémamegoldás iskolája*. I. kötet. Tankönyvkiadó, Budapest.

Ross, B. H. és Kennedy, P. T. (1990): Generalizing from the use of earlier examples in problem solving. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, **16**. 42–55.

Schelten, A. (1980): *Grundlagen der Testbeurteilung und Testerstellung: Teststatistik und Testtheorie für Pädagogen und Ausbilder in der Praxis*. Quelle & Meyer, Heidelberg.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical problem solving*. Academic Press, New York.

Schultz, K. és Lochhead, J. (1991): A view from physics. In: Smith, M. U. (ed): *Toward a unified theory of problem solving: Views from the content domains*. LEA, Hillsdale .

Silver, E. A. (1990): Contributions of research to practice: Applying findings, methods, and perspectives. In: Cooney, T. J. és Hirsch, C. R. (szerk.): *Teaching and learning mathematics in the 1990s.* 1990 Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Skemp, R. R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat, Budapest.

Solso, R. L. (1988): *Cognitive psychology*. Allyn and Bacon, Boston.

Stanovich, K. E. és Cunningham, A. E. (1991): Reading as constrained reasoning. In: Sternberg, R. J. és Frensch, P. A. (szerk.): *Complex problem solving: Principles and mechanisms*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. és Ktorza, D. (1990): Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*m, **22**. 2. sz. 112–121.

Sternberg, R. J. (1998): Mi a matematikai gondolkodás? In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest.

Sweller, J. (1988): Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*. **12**. 2. sz. 257–285.

Sweller, J. és Levine, M. (1982): Effects of goal specificity on means–ends analysis and learning. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, **8**. 5. sz. 463–474.

Sweller, J., Mawer, R. F. és Ward, M. R. (1983): Development of expertise of mathematical problem solving. *Journal of Experimental Psychology: General,* 112. sz. 634–56.

Szabó Csaba (1997): *Gondolkodás*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen.

Tarkó Klára (1999): Az olvasás és a metakogníció kapcsolata iskolás korban. *Magyar Pedagógia*, **99**. 2. sz.. 175–192.

Vidákovich Tibor és Cs. Czachesz Erzsébet (1999): Az olvasásmegértési képesség fejlődése. *Iskolakultúra*, **9**. 6–7. sz. 59–68.

Vidákovich Tibor és Csapó Benő (1998): A szövegesfeladat-megoldó készségek fejlődése. In: Varga Lajos és Budai Ágnes (szerk.): *Közoktatás-kutatás, 1996-1997*. Művelődési és Közoktatási Minisztérium és az MTA Pedagógiai Bizottsága, Budapest.

Walter, M. I. és Brown, S. I. (1977): Problem posing and problem solving: An illustration of their interdependence. *Mathematics Teacher*, **70.** 1. sz. 3–13.

Wood, R. (1991): *Assessment and testing: A survey of research.* Cambridge University Press, Cambridge.

ABSTRACT

JÓZSEF KONTRA: THE ROLE OF LINGUISTIC AND STRUCTURAL VARIABLES IN SOLVING MATHEMATICAL WORD PROBLEMS

Most theories of mathematical problem solving hold that students' performance on algebraic word problems is best interpreted by assuming that there are differences between the *text base*, i.e. an elaboration of the verbal formulation of surface structure into propositions, and the *situation model*, i.e. the representation of the situation presented in the text. The first section of this paper addresses issues of problem categorisation and representation. Three aspects of mathematical word problems found in textbooks are discussed, namely, *content*, *generalisation* and *abstraction*. The empirical findings presented tend to confirm the important role of linguistic and structural variables which describe the textual statements of story problems. 32 problems on uniform rectilinear motion, arranged into 4 tests, were administered to 630 students in the 9^{th} grade. The system of 31 variables developed by Lepik (1990) was applied in the research reported, complemented with several additional variables newly introduced. The ratio of correct responses to the individual items was used to assess student performance. Reliability issues are emphasised in the discussion of the results, including an examination of the effects of the above-mentioned variables on reliability (in order to make it possible for teachers to construct more reliable classroom tests by modifying certain task characteristics under their control). The results regarding difficulty levels are consistent with those of Lepik, i.e. most variables appeared to be good predictors of the performance measure used. These findings suggest that an appropriate readability level cannot be a neglected component of student success with word problems. However, in order to comprehend a problem, students must see how the bits of information (variables) fit together in a coherent whole (schema). Finally, it was found that the number of formulae required to be applied in solving the problem may influence task reliability. In this context, another significant factor appears to be the proportion of words with 9 or more letters. Some implications of the findings are discussed with regard to teaching.

Magyar Pedagógia, **101**. Number 1. 5–45. (2001)

Levelezési cím / Address for correspondence: Kontra József, H–7400 Kaposvár, Ezredév u. 10.