MAGYAR PEDAGÓGIA
110. évf. 2. szám 149–166. (2010)

VIZUÁLIS REPREZENTÁCIÓK SZEREPE A MATEMATIKAI PROBLÉMAMEGOLDÁSBAN. EGY 3. OSZTÁLYOS TANULÓK KÖRÉBEN VÉGZETT FEJLESZTŐ KÍSÉRLET EREDMÉNYEI

Csíkos Csaba*, Szitányi Judit és Kelemen Rita***
**SZTE BTK Neveléstudományi Intézet*
***ELTE TÓK Matematikai Tanszék*

Tanulmányunkban egy fejlesztő kísérlet eredményeiről számolunk be, amely kísérlet budapesti 3. osztályos tanulók körében zajlott, és célja a matematikai szöveges feladatok megoldásának elősegítése volt a vizuális reprezentációk szerepének tevékeny megismertetésén keresztül. A kísérlet elméleti háttérét lásd *Csíkos* (2009) tanulmányában, ezért most eltekintünk annak részletes ismertetésétől.

Kísérletünk alapvetése az, hogy a matematikai szöveges feladatok témakörének 20 leckére kiterjedő, strukturált feldolgozását valósítsuk meg, amelyben a tanár és a tanulók által készített rajzok, továbbá a tanulói mentális reprezentációk főszerepet kapnak. Legfőbb hipotézisünk, hogy a matematikai problémamegoldást kísérő mentális folyamatokban fontos szerepet kapnak a matematikai mennyiségeket és viszonyokat sematikusan modellező rajzok.

A kutatásban vizsgált tényezők

Kutatásunk a matematikai problémamegoldás területének egyik intenzíven kutatott részterületén zajlott. Kiindulópontunk az a feltételezés volt, hogy 3. osztályos tanulók körében a matematikai szöveges feladatok megoldása a tanári és tanulói rajzokról szerzett tudás bővítésével elősegíthető. A kutatás alapkérdésében szereplő három tényező (vizsgált tartalmi terület, metakognitív tudásterület, tanulói korcsoport) egy látszólag szűk vizsgálati területet jelöl ki, azonban igyekszünk igazolni, hogy a kutatási kérdés a pedagógiai jelenségek széles körében lehet releváns.

A választott kutatási területtel kapcsolatban arra mutatunk rá, hogy a matematikai szöveges feladatokkal kapcsolatos kutatások a matematikadidaktika területén belül is a matematikai problémamegoldás fejlesztésének eszközeként szerepelnek (*Verschaffel* és *De Corte*, 1997). Ugyanakkor a matematikai szöveges feladatok megoldásának kutatása – *Verschaffel*, *Greer* és *Torbeyns* (2006) szerint – az utóbbi években elmozdult az általános problémamegoldás keretében történő vizsgálatok irányába. A matematikai szöveges feladatok témakörének választása egy kutatásban gyakran azt jelenti, hogy az emberi gondolkodás vizsgálatát egy pontosan körülhatárolt feladathalmazon végezzük, ahol a feladatok jellemzői a kísérleti pszichológia módszertani szigorúságának megfelelő pontossággal változtathatók és manipulálhatók (*Csíkos*, 2003).

A vizsgált metakognitív tudásterület, vagyis a matematikai problémamegoldás során készített rajzok típusainak és szerepének ismerete (*Van Meter* és *Garner*, 2005) ugyancsak egy általánosabb vizsgálati terület megközelítésére alkalmas. *Goldin* és *Kaput* (1996) kiemelik a belső és külső matematikai reprezentációk közötti interakciók jelentőségét. A külső és belső reprezentációk közötti kapcsolatok egy része aktív és tudatos értelmezést nyer, míg más részük automatikusan és passzívan illesztődik hozzá a meglévő tudáshoz. A külső és belső reprezentációk tudatos interakciójának egyik bizonyítékát *Diezmann* (2005) kutatás szolgáltatta, amely vizsgálatban harmadik és ötödik osztályos tanulók szerepeltek, és már a harmadik osztályosok is képesek voltak a találgatási szint fölött megfeleltetést találni matematikai feladatok és ábrák között. Ez a vizsgálat egyben azt is indokolja, hogy a korosztály kiválasztásában a harmadik osztályos tanulócsoport megalapozottan jött számításba. A matematikai feladatok során felhasználható rajztípusokat *Berends* és *van Lieshout* (2009) tanulmánya nyomán kategorizálhatjuk, akik négy rajzkategóriát határoztak meg: (1) csupasz kép (pl. szimbólumok), (2) haszontalan, (3) segítő és (4) lényeges információt tartalmazó ábrázolás. Az utóbbi típus esetén a kép lényeges adatot tartalmaz a feladat megoldásához. A második és a harmadik típus közötti különbségtétel igazán lényeges, hiszen a *Kozhevnikov*, *Hegarty* és *Mayer* (2002) által megkülönböztetett sematikus és piktoriális típusok köszönnek vissza.

A választott tanulói korosztály kiválasztása két oldalról érkező kihívásnak tesz eleget. Korábbi kutatási eredmények szerint (lásd *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte*, 2000; *Sáenz-Ludlow* és *Walgamuth*, 1998; *Selter*, 1998; *English*, 1996) harmadik osztályos korra már markáns feladatmegoldó stratégiák figyelhetők meg a tanulók körében, amelyek között az iskola gyakran kitünteti a „Keresd a feladat szövegében a két számadatot, kösd össze azokat a megfelelő művelettel, és megkapod a végeredményt” stratégiát. Másrészt korábbi, 4. osztályosok körében lebonyolított fejlesztő kísérleteinkben a résztvevő pedagógusoktól arra kaptunk biztatást, hogy a metakognícióra alapozott fejlesztést alapelvére épülő programunkat dolgozzuk ki 3. osztályosok számára, mert így az osztályt tanító pedagógus a program hatásaira még egy évig építhet. Az alsó tagozatos korosztály szerepeltetése a metakognícióra alapozott pedagógiai fejlesztő programokban évtizedes hagyományokra tekint vissza.

A kutatásunk három pillérét jelentő tényező együttes alkalmazására *Van Meter*, *Aleksic*, *Schwartz* és *Garner* (2006) tanulmánya mutat példát. Ebben a vizsgálatban 4. és 6. osztályos tanulók szerepeltek, akik a matematikához közvetlenül nem kapcsolt szöveges feladatokhoz tartozóan rajzokat készítettek a megoldás elősegítésére. A kutatás a tanuló saját tevékenységének nyomon követése során megvalósuló rekurzív folyamatokat mutatott ki, amelyekben a verbális és a nem verbális (rajzos) információ duális természete kap főszerepet. Kísérletükből két jellemzőt emelünk ki: különböző kísérleti körülmények eltérő hatását a két korosztályban, valamint az eredményekkel összhangban lévő elméleti modellt, amit a tanulói rajzkészítés generatív modelljének neveztek.

Van Meter és mtsai (2006) vizsgálatában négy kísérleti feltétel szerepelt: (1) kontrollcsoport, (2) rajzkészítés: a tanuló rajzot készít egy oldalnyi elolvasott szöveghez, (3) illusztrációk megtekintése: a (2)-es feltétel kiegészül azzal, hogy a rajz elkészítése után megtekintették a szöveghez a kutatók által előre elkészített illusztrációt, és összehasonlíthatták azt saját rajzukkal, (4) nyílt végű kérdések: a (3)-as kísérleti feltétel kiegészül azzal, hogy az illusztráció megtekintése után nyílt végű kérdést kapnak a tanulók, amelyre írásban válaszolnak. Az eredmények szerint a 4. osztályos tanulók esetében az első két kísérleti feltétel mellett hasonló átlag született a problémamegoldó gondolkodást mérő utóteszten, vagyis önmagában a rajzoltatás keveset tett hozzá a tanuláshoz. Ellenben a harmadik és negyedik feltétel mellett magasabbak lettek az átlagok, de a különbség nem volt szignifikáns. A 6. osztályos tanulók esetében a rajzoltatás még önmagában nem, ám a (3)-as és (4)-es kísérleti feltétel már szignifikáns teljesítménynövekedést okozott. Ezekből az eredményekből arra a következtetésre jutottunk, hogy jelentős szerepe lehet a 3. osztályos tanulók körében végzett kísérletünkben a kutatói illusztrációknak vagy a tanár által az órán készített rajzoknak, viszont aligha lehet önmagában eredményes egy olyan fejlesztő program, amely a problémamegoldás fejlesztéséhez csupán rajzok készítését várja el a tanulóktól és elmarad a további segítségnyújtás.

Van Meter és munkatársai vizsgálata *Richard Mayer* modelljére épült, amelyet a tankönyvek tervezésében használtak. A modell szerint a tanulók a tankönyvi szövegből és a tankönyvi illusztrációkból verbális és nem verbális reprezentációkat alkotnak, majd ezt a kétféle reprezentációt egyesítik egy mentális modellben. *Van Meter* és munkatársai e modellre építve alkották meg a generatív rajzkészítési modellt, amely szerint a tanuló által önállóan készített rajzok nem pusztán a nem verbális információval való foglalkozást jelentik, hanem szükségszerűvé teszi a verbális és a nem verbális információ integrálását.

Mentális modellek és metareprezentációk a kutatás hipotéziseinek leírásában

Verbális és nem verbális tudáselemek integrált rendszereit és a kétféle tudástípus egymást támogató szerepét többféle fogalmi keretben vizsgálták az elmúlt évtizedek kutatásai. Ilyen fogalmi keretek: a vizuális és verbális kognitív stílusok leírása (lásd *Kozhevnikov*, *Hegarty* és *Mayer*, 2002; *Kozéki* és *Entwistle*, 1986; *Révész*, *Bernáth* és *Séra*, 1995) és a *Johnson-Laird*-i mentális modell elmélet. A következőkben a fejlesztő programunk elméleti alapjainak további tárgyalásaként a mentális modellek fogalmi keretét tekintjük át.

A nyolcvanas évektől terjedt el a mentális modell kifejezés, elsősorban *Johnson-Laird* (1983) munkássága nyomán, bár *Speelman* (1998) szerint a kifejezés eléggé homályos maradt. Mentális modellek alatt olyan reprezentációkat értünk, amelyek a verbális tudáselemek és az analóg reprezentációk között átmenetként értelmezhetők. A mentális reprezentációkat leíró elméletekben kétféle tudásformaként szerepelnek a szavakkal leírható tudáselemek (más néven a verbális információ vagy propozicionális tudás) és az analóg képzetek. Az analóg reprezentációk között a vizuális és auditív képzetek a legmeghatározóbb jelentőségűek (lásd *Csapó*, 1992).

A mentális modellek az analóg reprezentációkhoz, például a vizuális képzetekhez hasonlóak a konkrétság és meghatározottság szempontjából; viszont a verbális propozícióhoz hasonlatosak abból a szempontból, hogy verbálisan leírható információtartalmuk van. *Eysenck* és *Keane* (1998) példája szerint az a mondat (verbális propozíció), hogy „A könyv a polcon van", sokféle helyzetű és kinézetű könyv és polc esetén igaz lehet, ám a hozzá kapcsolódó mentális modellben (vagyis ahogyan elképzeljük a mondat tartalmát) általában egy konkrét kép jelenik meg előttünk, amelyen például a könyv álló helyzetben van, akár a polc közepén, akár a végén. A matematikai szöveges feladatokban tárolt verbális információ is valamilyen módon mentális modellek formájában reprezentálódhat a tanulók elméjében.

A mentális modellek fejlődése és fejlesztése szempontjából fölvetődik a kérdés, hogy a saját mentális modelljeinkről milyen módon és milyen pontossággal tudunk beszámolni. A metareprezentáció kifejezés arra utal, hogy az ember képes a saját mentális reprezentációit megismerni, képes azokról többé-kevésbé pontos verbális leírást adni. *Sperber* (1999) átfogó értelmezését adja a fogalomnak: olyan reprezentációk, amelyek tárgyai mentális reprezentációk.

Konkrét kísérletünk alaphipotézise a fenti terminológia felhasználásával: a matematikai szöveges feladatok megoldásának folyamatában megszülető mentális reprezentációk már alsó tagozatos korban tudatosíthatók; a vizuális képzetekre épülő mentális reprezentációk tudatosításának kísérletében részt vevő tanulók teljesítménye javul, és megváltoznak a matematika tantárgyhoz fűződő meggyőződéseik.

Vizsgálatunk a hazai közoktatást szolgáló fejlesztő kísérletek sorába illeszkedik, amely kísérletek a matematikadidaktika ismeretanyagának bővítését és az empirikus neveléstudományok oktatásmódszertani vonulatának fejlesztését is célul tűzik ki.

Módszerek

Résztvevők

A kísérleti és kontrollcsoport tanulói hat, egymáshoz fölrajzilag közel eső budapesti iskola 11 harmadik évfolyamos osztályának tanulói voltak. A 11 osztályt véletlenszerűen osztottuk két csoportra, így jött létre öt kísérleti és hat kontrollosztály. Minden esetben teljes osztályok szerepeltek kísérleti vagy kontrolosztályként. A résztvevő harmadikos tanulók átlagéletkora 2008 márciusában 9 év volt. A kísérleti csoportban 106 tanuló szerepelt (53 fiú és 53 lány), a kontrollcsoportot 138 tanuló alkotta (63 fiú és 75 lány).

Mivel a törvényi szabályozás szerint egy településen belül a szomszédos beiskolázási körzetek között nem lehetnek nagy különbségek az alacsony szocioökonómiai státusú tanulók arányában, mintánk a belvárosi budapesti iskolák alapvető társadalmi-kulturális jellemzőit hordozza. Hazai és nemzetközi rendszerszintű felmérések eredményei alapján ez a populáció az átlagosnál magasabb teljesítményt nyújt a különböző tudásteszteken.

Mérőeszközök, kísérleti elrendezés

A PPC (pretest-posttest-control) kísérleti elrendezést választottuk, ami azt jelenti, hogy mind a kísérleti, mind a kontrollcsoportban elő- és utótesztként azonos két tesztet oldottak meg a tanulók. Az azonosság nem csak a két csoport, hanem az elő- és utótesztek között is teljesült. Ezen felül a kísérleti csoportban egy további mérőeszköz szerepelt előtesztként.

A kísérleti és kontrollcsoport közös tesztjei

Számolási készség tesztje: A Nemzeti alaptantervben megfogalmazott céloknak megfelelő, az Educatio Kht. kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterve alapján összeállított teszt 32 itemet tartalmazott. A feladatok az ezres számkörben végzett alapműveleteket, nyitott mondatokat, mennyiségi összehasonlításokat és számsorozatok folytatását tartalmazták. Előtesztként a teljes mintán a Cronbach-α reliabilitásmutató értéke 0,84 volt.

Szöveges feladatok tesztje: A teszt hat szöveges feladatot tartalmazott, amelyek között az első két feladat fordított szövegezésű volt (lásd *Mayer* és *Hegarty*, 1996).

A további négy feladat esetén a feladatban szereplő számadatok és esetleges kulcsszó keresése mellett a feladat mélyebb megértésére, megfelelő problémareprezentációra és matematikai modellre volt szükség a megoldáshoz. A szöveges feladatok értékelése a *Verschaffel*, *De Corte* és *Lasure* (1994) által használt „flamand feladatsor" pontozási útmutatója alapján történt. Korábbi hazai felmérésünkben (*Csíkos*, 2003) bemutattuk ezt a pontozási módszert, amelynek lényege, hogy szétválasztjuk a megoldásban szereplő műveletvégzés pontos kivitelezését és a feladat megértésről tanúskodó modellalkotást. Mind a négy feladat esetében a megértést indikáló „realisztikus válasz" megjelenése volt a legfontosabb mutató. Egy példával illusztráljuk a pontozás működését (3. feladat):

Egy tojástartóba 10 tojás fér. Hány tojástartóba fér 35 tojás?

A két értékelési szempontot egymásra vetítve négyféle megoldást különböztetünk meg. (1) helyesen elvégzett osztás, de nem realisztikus válasz, például „35 : 10 = 3, a maradék 5, tehát 3 tojástartóba férnek bele." (2) nincs helyesen elvégzett osztás, de realisztikus a válasz, például „akár mindegyik tojást külön tartóba tehetjük, így 35 tojástartóba biztosan belefférnek" (3) helyesen elvégzett osztás, realisztikus válasszal, például „35 : 10 = 3, a maradék pedig 5, tehát kell egy negyedik tojástartó." (4) nincs helyesen elvégzett osztás, és nem realisztikus a válasz, például „10 + 35 = 45, negyvenöt tojástartóra van szükség." Az eredeti flamand pontozási rendszer szerint az itt (2)-es és (3)-as számmal jelölt választípus esetén adtunk egy pontot a megoldásra.

*A Clark-féle rajzteszt (CDT, Clark Drawing Test) első feladatá*t a kísérleti osztály tanulói körében vettük föl a kísérlet megkezdése előtt. A CDT hazai standardizálása során kapott eredmények alapján (*Kárpáti*, 2001) elegendőnek láttuk a teszt első feladatának használatát, mert a teljes teszt nagyon erős belső konzisztenciát mutatott (a Cronbach-α

értéke 0,97 volt). A feladat első itemét, amely cím adását kérte a rajzhoz, elhagytuk, mert ennek a feladat többi itemével 0,2-0,3 értékű korrelációi voltak *Kárpáti* vizsgálatában. A feladat így 12 itemből állt, amelyek egyenként ötfokozatú skálán voltak, vagyis maximálisan 60 pontot lehetett elérni. A CDT első feladata alkalmazásának célja az volt, hogy megvizsgálhassuk, a vizuális reprezentációkra építő fejlesztő program eredményei (ezáltal a fejlesztés sikeressége) összefügg-e a tanulók általános rajzkészség-szintjével. A CDT első feladatának reliabilitása (N=100) 0,88 volt vizsgálatunkban.

A kísérleti program

A kísérleti program kialakítása során első célunk az volt, hogy a 3. osztályos matematikatanítás szokásos tematikus rendjébe illeszkedően a matematikai szöveges feladatoknak egy szisztematikus rendszerét tekintsük át. Korábbi kutatási eredmények felhasználásával három szempontot definiáltunk, amelyek mentén a program fölépült. (1) Megoldható-e a feladat egy vagy két számtani alapművelet elvégzésével. Gyakori tanulói matematikai meggyőződés szerint a feladatmegoldás lépéseként meg kell keresni *az* elvégzendő műveletet. Olyan feladatok szerepeltetésével, amelyekben nem kapható meg a megoldás egy vagy két számtani művelet elvégzésével. (2) Az elvégzendő számtani alapműveletek száma. 3. osztályban legtöbbször egy számtani művelet megoldását igénylik a szöveges feladatok, de a fejlesztő programunk végén előkerültek két alapművelettel megoldható feladatok is. (3) *Mayer* és *Hegarty* (1998) munkái alapján az egyenes és fordított (consistent és inconsistent) szövegezésű feladatok megkülönböztetése gyakran használt terminussá vált a szakirodalomban. A tanulók feladatmegoldó stratégiái gyakran tartalmazzák azt az elemet, hogy a feladat szövegében megtalált számadatok mellett egy kulcsszót keresnek, amely segít az elvégzendő művelet meghatározásában. Például a feladat szövegében talált „kisebb” szó szoros asszociációként a kivonás műveletére utalhat, a „hányszor” kérdőszó pedig gyakran a szorzás műveletéhez kötődik.

E három szempont alapján az 1. táblázatban látható szerkezetű fejlesztő programot határoztuk meg.

A fejlesztő programban részt vevő pedagógusok számára egy munkafüzetet készítettünk, ami tartalmazott egy rövid elméleti bevezetést a fejlesztő program alapelveiről és a feladatkategorizálás szempontjairól. A munkafüzet tartalmazta a kísérlet hipotéziseit, minden egyes tanítási egység célját, az adott tanítási egységhez rendelt feladatokat, a feladatmegoldás során követendő módszereket és a felhasználható oktatási segédanyagokat. A tanulók minden egyes megoldandó feladatot az órán, a tanári munkafüzetben leírt időben és módon kaptak kézbe; valamennyi feladat külön-külön, A4-es méretű lapokon szerepelt.

A kísérlet legfőbb célja az volt, hogy segítsük a tanulókat a rajzok a matematikai feladatmegoldásban betöltött szerepének megértésében. A kísérleti csoportban tanító pedagógusok feladat volt, hogy bátorítsák a tanulói rajzkészítést – még a legegyszerűbb vagy egyszerűnek látszó feladatok esetében is. A feladatmegoldás során a tanítók beszélgetést kezdeményeztek a rajzok matematikai feladatmegoldásban betöltött szerepéről, ezáltal fokozatosan tudatosítva többféle rajztípus létezését. Bár lehetségesek egyéni különbségek abban, hogy egy-egy tanuló számára melyik rajztípus segít leghatékonyabban, általánosságban a bevezetőben bemutatott sematikus rajztípus használatát javasolták a tanulóknak. Ugyanakkor fenntartották a tanítók annak lehetőségét, hogy adott feladat és adott tanuló kapcsán más típusú rajz készítése lehet célravezető.

1. táblázat. A fejlesztő program szerkezete a matematikai szöveges feladatok típusai alapján

Tanítási egység	*Szövegesfeladat-típus*			
	Számtani művelettel megoldható	*Egy darab megoldás*	*Egy lépésben megoldható*	*Egyenes szövegezésű*
1	n	i	–	–
2	n	n	–	–
3	n	i	–	–
4	n	n	–	–
5	i	–	i	i
6	i	–	i	i
7	i	–	i	n
8	i	–	i	n
9	i	–	i	i/n
10	i	–	i	i/n
11	*A feladatokhoz készíthető rajzok típusainak elemzése*			
12	n	n	–	–
13	i	–	i	i
14	n	n	–	–
15	i	–	i	n
16	i	–	i	i
17	i	–	i	i/n
18	i	–	i	i/n
19	i	–	n	i
20	i	–	n	n

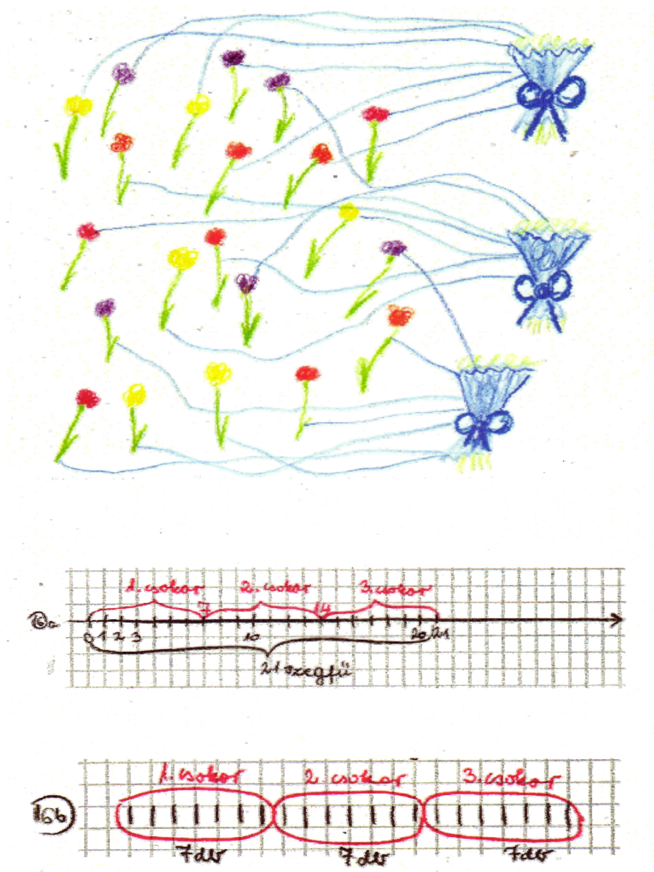
A kísérleti program másik fontos jellemzője oktatás-módszertani természetű volt. Az osztálytermi tanítás-tanulás gyakorlatát két területen változtattuk meg. Néhány feladat esetében a kísérleti csoport pedagógusai a hangosan gondolkodás technikájával mutatták be a lehetséges elágazásokat, a lehetséges célravezető vagy éppen nem hatékony gondolatmeneteket. Emellett több feladat esetében a tanulók 5-6 fős, a matematikai tudásszintet tekintve heterogén csoportban dolgoztak, és ennek során egymás megoldási terveinek elfogadására és megvitatására bátorítottuk őket.

A feladatok többségéhez színes, írásvetítőhöz alkalmas fóliákat készítettünk. (Az írásvetítő volt az a közös oktatástechnológiai minimum, amelyre a kísérleti osztályokban építhettünk.) A fóliák használatával az volt a célunk, hogy egységes vizuális segítséget kapjanak a tanulók, amikor lemásolnak, összehasonlítanak vagy elemeznek egy adott szöveges feladathoz készült rajzot. Például a 6. tanítási egység 16-os feladata a következő volt:

Ma reggel három egyforma csokrot rendeltek. 21 szál szegfűt szedett le hozzá a kertész. Hány szálat kötöttek egy csokorba?

Ennél a feladatnál, egyéni munkát követően, a tanulók a saját maguk által a feladathoz készített rajzot összehasonlították az írásvetítőn megjelenő rajzokkal.

A fóliákon szereplő rajzokat az első és harmadik szerző tervei alapján grafikus készítette, akinek az volt a feladata, hogy a gyermekrajzok forma- és színvilágát idéző ábrákon az általunk megadott matematikai struktúrát jelenítse meg. A fejlesztésben részt vevő pedagógusok munkafüzete részletesen leírta a fóliák felhasználásának menetét.



1. ábra
A 16-os számú feladathoz készített, a tanár által írásvetítőn bemutatott ábrák

A kísérlet implementációja

A kísérleti osztályok tanítóit a tanulmány első és második szerzői egy közös megbeszélésen tájékoztatták a kísérletről. A megbeszélés során bemutattuk a kísérlet céljait, ismertettük hipotéziseinket és átadtuk a tanári munkafüzetet. A kísérlet időszaka alatt a pedagógusok felmerült kérdéseire emailben és telefonon válaszoltunk. Célunk nem annak igazolása volt, hogy rövid idejű tanártovábbképzéssel szignifikáns változásokat generálhatunk a tanulók matematikai teljesítményében – legalábbis nem abban az értelemben, ahogyan tanári szakmai fejlődésről és fejlesztésről általában beszélünk. Meggyőződésünk ugyanakkor, hogy a tanítók lehetséges szakmai-módszertani repertoárjában jelen vannak azok az elemek, amelyek tudatos és célszerű mozgósítása egy rövid idejű fejlesztő kísérlet során is lehetséges. A matematikatanárrá válás útján hosszú ideig megmaradnak azok a feladatmegoldó stratégiák, amelyek felváltása már alsó tagozatos korban kívánatos lenne (*Van Dooren*, *Verschaffel* és *Onghena*, 2003).

A kísérlet megkezdése előtt a kísérleti csoport tanulói három, a kontrollcsoport tanulói két tesztet töltöttek ki három, illetve kettő egymást követő tanórán. Az előtesztek felvételét követően a kísérleti osztályokban 20 tanítási órára terjedt ki a fejlesztő program. A program tanítási egységei a 45 perces tanórának átlagosan mintegy felét vették igénybe. A kontrollcsoportban tanító pedagógusok nem ismerték a kísérlet céljait és hipotéziseit. A fejlesztő programot olyan időszakra időzítettük, amikor a kísérleti és kontrollosztályokban egyaránt a szöveges feladatok témája szerepelt a tanmenetekben. A kísérleti és kontrollcsoport közötti különbségek tehát kétrétűek: egyrészt a kísérleti csoport részvétele a fejlesztő programban, másrészt a kontrollcsoportban 20-szor fél tanítási idővel több maradt a „szokásos” osztálytermi gyakorlat számára, ami – a 3. osztályban használt tankönyvek szemléletmódja alapján – a szöveges feladatok tanítása területén közelebb áll a számolási készség szövegbe öltöztetett gyakoroltatásához, mint a valóság matematikai modellezésnek elősegítéséhez.

Eredmények

A kísérlet eredményeinek meghatározása során a mindkét elő- és utótesztet megíró tanulók adatait vesszük figyelembe. (Az egyes mérőeszközök reliabilitásának kiszámítása során nem alkalmaztuk ezt a megszorítás.) Mivel a tesztek felvétele osztálytermi környezetben történt, a betegségek miatti hiányzások miatt jellemzően előforduló 5%-os mintalemorzsolódás természetesnek tekinthető.

Leíró statisztikai adatok, az átlagok változása

A 2. táblázat bemutatja a vizsgálat során tapasztalt átlag- és szórásértékeket a kísérleti és kontrollcsoport elő- és utóteszteken elért eredményeire.

2. táblázat. A kísérleti és kontrollcsoport elő- és utóteszteken elért eredményeinek leíró statisztikai értékei

		Kísérleti csoport (N=97)		*Kontrollcsoport (N=119)*	
		Előteszt	*Utóteszt*	*Előteszt*	*Utóteszt*
Számolási készség	Átlag	25,31	27,00	26,74	27,56
	Szórás	4,61	4,35	4,25	4,00
Szöveges feladatok	Átlag	2,57	4,12	3,51	4,06
	Szórás	1,68	1,68	1,56	1,67

A kísérleti és kontrollcsoport között az előteszteken meglévő különbségek kisebbek, mint amit az utóteszteken tapasztaltunk (2. táblázat). A számolási készség tesztje esetében az elérhető maximális pontszám 32 volt, így itt számolni kell a plafonhatás különbségek mértékének megítélését torzító jelenségével. A szöveges feladatok teszten az elérhető maximális pontszám 6 pont volt, így itt az átlagok változásának nagyobb terepe volt, de ugyanakkor a relatív szórás értéke magas. Az átlagok közötti különbségek nagyságának pontosabb elemzését a 3. táblázatban mutatjuk be.

3. táblázat. A kísérleti és kontrollcsoport elő- és utóteszteken elért teljesítményátlagainak összehasonlítása

	Levene-próba		*Kétmintás t-próba*	
	F	*p*	$\|t\|$	*p*
Számolási készség előteszt	1,24	0,27	2,37	0,02
Szöveges feladatok előteszt	0,81	0,37	4,29	<0,001
Számolási készség utóteszt	0,54	0,47	0,99	0,32
Szöveges feladatok utóteszt	0,40	0,53	0,28	0,78

Mind a számolási készség, mind a szöveges feladatok tesztjén az előtesztelés során a kontrollcsoport szignifikáns előnye volt kimutatható (3. táblázat). Az utótesztelés során nem volt szignifikáns különbség a csoportok teljesítménye között. A kísérleti hatás mértékének elemzése további információt ad arra vonatkozóan, hogy milyen mértékű fejlesztő hatást sikerült megvalósítani.

A kísérleti és kontrollcsoportok átlagainak változása nem csak egymással összehasonlítva, hanem adott csoporton belül az elő- és utóteszt eredményeinek összehasonlításával is nyomon követhető. A páros t-próbák eredményei szerint a számolási készség tesztjén mindkét csoport esetében szignifikáns változás figyelhető meg: $t(118)=2,87$, $p<0,01$ a kontroll csoport, $t(96)=5,48$, $p<0,01$ a kísérleti csoport esetében adódott értékek. A szöveges feladatok tesztjén is mindkét csoport átlagainak szignifikáns növekedése figyelhető meg: $t(118)=4,78$, $p<0,01$ a kontroll csoport, $t(96)=10,73$, $p<0,01$ a kísérleti csoport esetében. Ezen túlmenően a szöveges feladatok tesztjének valamennyi itemén szignifikánsan jobb eredményt ért el az utóteszten a kísérleti csoport, míg a kontrollcsoport átlaga három feladat esetén nem mutatott szignifikáns növekedést.

A kísérleti hatás meghatározása

A vizsgálatunkban alkalmazott PPC-elrendezés a *Cohen*-féle d-hatásmutató módosított változatának alkalmazását igényli (*Morris*, 2005). Ebben az esetben a *Cohen*-féle d-érték az átlag változásának standard mértéke, és a következő egyenlettel becsülhető:

$$\Delta = \frac{(M_{post,\exp} - M_{pre,\exp}) - (M_{post,control} - M_{pre,control})}{SD_{pre,\,pooled}}, \text{ ahol}$$

$$SD_{pre,\,pooled} = \sqrt{\frac{(n_{\exp} - 1)SD^2_{pre,\exp} + (n_{control} - 1)SD^2_{pre,control}}{n_{\exp} + n_{control} - 2}}$$

M az átlag, SD a szórás jele a képletben, az indexként feltüntetett exp a kísérleti csoportra utal, a pre és post rövidítések pedig az elő-, illetve utóteszteket jelölik.

A d értékére adott becslés még tartalmaz egy c együtthatót: d=cΔ, ahol

$$c = 1 - \frac{3}{4(n_{\exp} + n_{control} - 2) - 1}$$

Az így meghatározott torzítatlan (unbiased) d-hatásméret a szöveges feladatok esetében 0,62, a számolási készség esetén 0,20. *Cohen* (1969) szerint a d=0,8 érték jelentős, a d=0,5 közepes, míg a d=0,2 érték kicsi kísérleti hatás indikátora. Ennek alapján a fejlesztő programunkban tapasztalt kísérleti hatás kismértékű a számolási készségre, és jelentős (a közepes és a nagy közötti) a szöveges feladatokra.

Összefüggések a kísérlet háttérváltozóival

A két matematikai teszt mellett a kísérleti csoport tanulóival a Clark-féle Rajzteszt (CDT) első feladatát is felvettük. Emellett a kísérleti és a kontrollcsoport is válaszolt néhány kérdésre, amelyekkel a matematikával kapcsolatos attitűdjeik és meggyőződéseik feltárását tűztük ki célul. Valamennyi háttérváltozónk esetén az első elemzési szempontunk az lesz, hogy az adott változónak van-e szignifikáns hatása a kísérlet utótesztjének eredményeire.

A CDT első feladata az általános értelemben vett rajzkészség mint látens változó egyik manifeszt változójának tekinthető. Elsőként azt vizsgáltuk, hogy a rajzkészség szintje vajon szerepet játszik-e a kísérlet eredményeiben. A számolási készség tesztjével kapott korrelációs érték -0,04 (p=0,73, N=94), a szöveges feladatok tesztjével vett korrelációs érték pedig -0,16 (p=0,13, N=94).

Annak vizsgálatához, hogy a rajzkészség milyen kísérleti hatással van a vizsgálat utótesztjeire, a rajzkészség szintje szerinti két csoportra bontottuk a kísérleti csoport tanulóit. A két, közel egyenlő létszámú részminta egyikét azok a diákok alkották, akik 34 pont felett teljesítettek (46 fő), míg a másik részmintában a 35 pont alatti teljesítményt nyújtók voltak (48 fő). Ilyen mintafelosztás esetén a rajzkészség hatása (éta-négyzet) a számolás készség utótesztjén elért eredményekre 0,003, a szöveges feladatok tesztjére pedig 0,018. Ez utóbbi érték is alacsony kísérleti hatást jelez, amit úgy interpretálhatunk, hogy a rajzkészség kezdeti szintje nincs jelentős hatással a kísérleti program eredményeire. Másképpen fogalmazva: a kísérleti program eredményessége csak kevéssé függ a rajkészség kiinduló szintjétől.

A PPC kísérleti elrendezés lehetővé teszi, hogy elő- és utótesztek pontszámainak különbségéből egyetlen változót képezzünk egy adott változó jellemzésére. Így például a számolási készség elő- és utótesztjein elért eredmények egyetlen mutatóval is jellemezhetők, amelyet a számolási készség növekményének nevezhetünk. Ezáltal lehetőség nyílik kétszempontú varianciaanalízis alkalmazására, amellyel egyes háttérváltozóknak a kísérleti elrendezéshez viszonyított hatásméretét tudjunk meghatározni. A kísérleti elrendezés és egyes háttérváltozók interakcióját is számszerűsíthetjük a növekmény-változók használatával.

Kutatási kérdés, hogy a fiúk és a lányok egyformán profitáltak-e a kísérletből. Ezt a kérdést 2 X 2-es ANOVA vizsgálattal (kísérleti elrendezés X nem) elemezhetjük. A kísérleti elrendezésből adódó kísérleti hatás ebben a modellben 0,13 volt (parciális éta-négyzet; $p<0{,}001$), a nemek közötti különbségekből adódó kísérleti hatás, valamint a kísérleti elrendezés és a nemek interakciója (parciális éta-négyzetek rendre 0,001 ($p=0{,}62$) és 0,01 ($p=0{,}09$)) azonban nem bizonyult szignifikánsnak. A számolási készség növekmény-változójára elvégezve a kétszempontú variancia-analízist, ugyanezt a jelenséget tapasztaltuk. A kísérleti elrendezésre visszavezethető parciális éta-négyzet értéke 0,02 ($p=0{,}04$), a nemek közötti különbségekből adódó kísérleti hatásméret 0,001 ($p=0{,}60$), a kísérleti elrendezés és a nemek interakciójának hatásmérete pedig 0,001 ($p=0{,}66$).

További háttérváltozókat tartalmazott a szöveges feladatok elő- és utótesztje. Három kérdés mindkét kérdőívben szerepelt, így ezeknél meg határozható a kísérlet során bekövetkező változás mértéke, és annak esetleges kapcsolata a kísérleti elrendezéssel. A 4. táblázat a három háttérkérdést, és a kapott leíró statisztikai értékeket tartalmazza.

Az átlagok összehasonlítására végzett kétmintás t-próbák szerint az első kérdésben szignifikáns különbségek adódtak az elő- és utóteszten is ($p<0{,}05$). Az elő- és utóteszt átlaga között ugyanakkor a páros t-próbák nem mutattak szignifikáns különbséget egyik részmintán sem.

A második kérdés esetében a kísérleti és kontrollcsoport esetében is az átlagok szignifikáns változása volt megfigyelhető a páros t-próbák eredményei alapján. A kísérleti csoport esetében az átlag változása nagyobb mértékű, iránya pedig azt mutatja, hogy a kísérlet végére kevésbé tartották nehéznek a matematikát. A kétmintás t-próba szerint ugyanakkor a második és harmadik kérdésnél sincs szignifikáns különbség a kísérleti és kontrollcsoport között, sem az elő-, sem az utóteszten. A harmadik kérdés esetében a páros t-próba szerint a harmadik kérdés megítélése nem változott jelentősen egyik csoportban sem.

4. táblázat. Az elő- és utótesztelésnél szereplő három háttérkérdés leíró statisztikai mutatói (1=a legpozitívabb viszonyulás, 2=semleges viszonyulás, 3=a legkevésbé pozitív viszonyulás)

		Előteszt		*Utóteszt*	
		Kísérleti	*Kontroll*	*Kísérleti*	*Kontroll*
Hogy érzed magad a matematikaórákon?	Átlag	1,65	1,43	1,61	1,41
	Szórás	0,70	0,59	0,69	0,63
Mennyire nehéz számodra a matematika?	Átlag	1,85	1,87	1,69	1,78
	Szórás	0,51	0,45	0,51	0,46
Szerinted mennyire fontos, hogy tudd a matematikát?	Átlag	1,07	1,02	1,09	1,05
	Szórás	0,30	0,13	0,36	0,26

Két további háttérkérdést tartalmazott az utóteszt. Abban a kérdésben, hogy „Menynyit fejlődött matematikatudásod az elmúlt két hónapban?”, a kísérleti és kontrollcsoport átlagai között nem volt szignifikáns (t(210)=0,11, p=0,91), és ez arra a fejlesztési tartalékra mutat rá, amely a tanulók énképének alakítása rejt magában. Vagyis annak ellenére, hogy a kísérleti csoport tanulóinak teszttel mérhető matematikai tudása a kontrollcsoporthoz képest jelentősen változott, de – feltehetőleg viszonyítási pont híján – a tanulmányi éntudatuk fejlődése ezt nem követte.

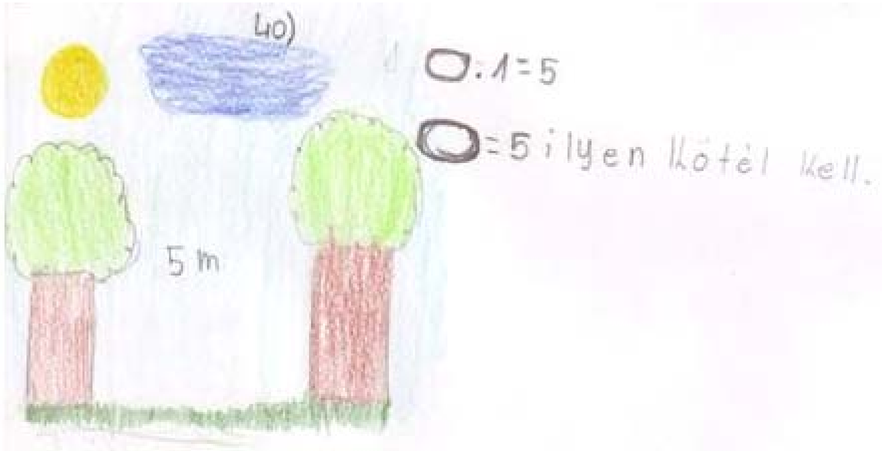
A másik háttérkérdés, amely csak az utóteszten szerepelt, a következőképen szólt: „Egyetértesz-e azzal, hogy ha a szöveges feladatról sikerül egy jó rajzot készíteni, akkor a megoldás is könnyebb lesz?” Mivel ennek a meggyőződésnek a kialakítása a fejlesztő program célkitűzései között szerepelt, ezért a hipotézis igazolásának tekinthető, hogy a kísérleti csoport átlaga szignifikánsan különbözött a kontrollcsoportétól (t(209)=2,18, p=0,03).

Kvalitatív elemzések lehetősége: a gyerekek tanórán készült rajzainak elemzése

A kísérleti csoportban tanító pedagógusok összegyűjtötték azokat az A4-es lapokra készített rajzokat, amelyeket a tanulók a kísérlet folytatása során készítettek. Ezeken a lapokon többféle típusú rajzzal találkoztunk. Első példánkban a 40-es számú feladathoz készült egyik tanulói rajzot mutatjuk be. A feladat szövege így szólt:

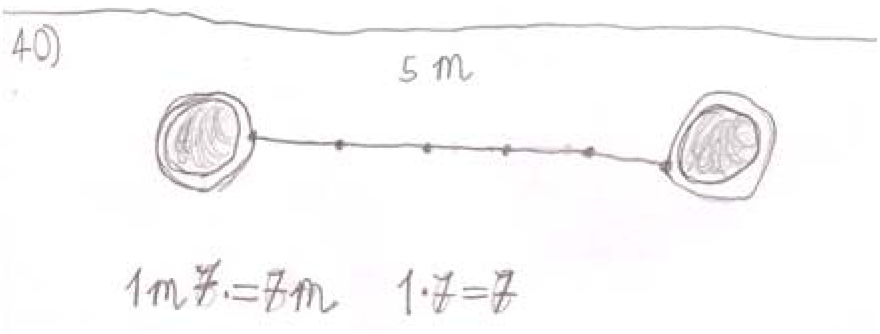
> „Két fa között, amelyek egymástól 5 m távolságra vannak, kötelet szeretnénk kifeszíteni. Sajnos, csak 1 m hosszú köteldarabok vannak. Hányat kell ezekből egymáshoz kötözni?”

Egy piktoriális típusú tanuló rajzát a 2. ábrán mutatjuk be.



2. ábra
Példa piktoriális típusú tanulói rajzra

Ugyanehhez a feladathoz egy másik tanuló a 3. ábrán szereplő rajzot készítette.



3. ábra
Példa sematikus típusba tartozó tanulói rajzra

A 2. és 3. ábra közötti különbségek fogalmi szinten a piktoriális és a sematikus rajzok közötti definíciós különbséggel írhatók le. Míg a 3. ábra a feladat szövegében leírt dolgok közötti lényegi, matematikai viszonyokat szemlélteti, addig a 2. ábra pusztán a feladat szövegében szereplő dolgok képét adja vissza. Jelen esetben a sematikus típusú rajz elősegítette a realisztikus válasz megszületését. *Hegarty* és *Kozhevnikov* (1999) eredményei alapján azt várhatjuk, hogy általános tendenciaként jelenik meg a sematikus rajzok készítőihez köthető jobb problémamegoldás. Az ő vizsgálatukban 6. osztályos fiúk szerepeltek, és bár láttuk, hogy a nem szerepe a kísérletünkben elhanyagolhatónak bizonyult, az életkori különbségek és az eltérő kísérleti helyzet miatt a megalapozottabb összefüggés-vizsgálathoz további elemzések szükségesek. Az életkori különbség kezelésében azt kell figyelembe venni, hogy a rajzkészség fejlődése és a matematikai feladatokkal kapcsolatban megszerzett tapasztalatok befolyásolhatják a matematikai teljesítmény és a gyerekrajzok típusa közötti összefüggést. Másrészt *Hegarty* és *Kozhevnikov* (1999) laboratóriumi körülmények között készített felmérést, ahol a megoldáshoz készített tanulói rajzok zsűritagok egyetértésének kvantitatív ellenőrzése mellett kategorizálták.

Következtetések

Kutatásunkat harmadik osztályos tanulók körében végeztük, a matematikai problémamegoldás fejlesztésének területén. A vizsgálat független változói, amelyek egy – reményeink szerint – koherens fejlesztő programban öltöttek testet, a következők voltak. (1) A matematikai szöveges feladatok tanulásában egy háromszempontú rendszert alakítottunk ki az egyszerű aritmetikai szöveges feladatok rendszerező áttekintésére. (2) A kísérlet során a fejlesztésben részt vevő pedagógusok több feladathoz előre elkészített típusrajzokat mutattak be, lehetőséget teremtve a tanári és tanulói rajzok tudatos elemzésére és összevetésére. (3) Több feladat esetében képességszint szerint heterogén csoportokban dolgoztak a tanulók, ezzel is elősegítve a megfelelő, a matematikai szempontból hibás megoldások iránti toleráns légkör megteremtését. Elvileg a független változók szerint további kísérleti részcsoportokat lehetett volna létrehozni, azonban a kísérlet talán legfontosabb célja az ökológiai validitás biztosítása melletti teljesítménynövelés volt. A három említett kísérleti tényező között a rajzok készítését és elemzését helyeztük középpontba, azonban annak érdekében, hogy ezt osztálytermi és tanórai keretek között olyan módon tegyük, hogy általánosítható eredményekhez és fenntartható fejlődéshez jussunk, a másik két tényező (a feladatrendszer kiépítése és a hozzá hangolt oktatási módszerek) jelenléte is szükséges volt.

Eredményeink szerint a fejlesztő kísérlet eredményesnek bizonyult. A kísérleti hatás mértéke megfelelő ahhoz, hogy sorra vegyük, milyen elméleti következtetések és milyen javaslatok fogalmazhatók meg. A kísérlet független változói közül a csoportmunka alkalmazásának önmagában vett kísérleti hatása is feltételezhető (lásd *Józsa* és *Székely*, 2004), azonban a kooperatív tanulás a pedagógiai kísérletek világától függetlenül is jelen van közoktatásunkban, így a mostani kísérletünk kontrollcsoportjaiban is feltételezhetően alkalmazásra került csoportmunka. A matematikai szöveges feladatok rendszerezett tanulmányozásának is lehet önmagában vett kísérleti hatása: azonban az a stratégia, hogy elindulva a számtani művelettel nem megoldható feladatoktól a két alapművelettel megoldható feladatokig több szövegesfeladat-típust megoldanak a tanulók, többé-kevésbé valamennyi tankönyv és munkafüzet logikus felépítésével megegyező stratégia. Úgy gondoljuk tehát, hogy a tapasztalt kísérleti hatás elsősorban a kísérlet fő független változójával, a tanári és tanulói rajzok szerepeltetésével magyarázható. A kísérlettől teljesen függetlenül készülnek és bemutatásra kerülnek rajzos modellek a matematikaórákon, a kísérletben megvalósított jelentős különbségnek azt tartjuk, hogy a külső(rajzos) reprezentációk és a belső (mentális) reprezentációk közötti interakciót tudatosítottuk a tanulókban- nyilván olyan szókinccsel, és olyan módszerekkel, amelyek a korosztály számára elérhetők. Ugyanakkor az explicit tudatosítás mellett az implicit, intuitív tanulási folyamatok is szerepet kaphattak, és megítélésünk szerint a kutatói tervezés alapján bemutatott rajztípusok ab ovo elősegíthetik a külső és belső reprezentációk közötti implicit interakciót.

Fejlesztő kísérletünk az alsó tagozatos pedagógiai fejlesztő programok általános jellemzői szempontjából a következő két tanulságot hozhatja. Egyrészről amellett, hogy az alsó tagozatos iskolai évek az alapkészségek fejlesztésében kitüntetett szerepűek, a metakognitív folyamatokra alapozott fejlesztés fontosságát és létjogosultságát is hangsúlyozni szeretnénk. Korábbi kutatásainkban (pl. *Csíkos* és *Steklács*, 2010; *Csíkos*, 2005) már bemutattuk a metakognícióra alapozott fejlesztés lehetőségeit, a mostani kísérlet újólag megerősítheti, hogy az alapkészségek fejlesztésével párhuzamosan megvalósítható a metakognitív tudáselemek fejlesztése. Eredmény, hogy a kísérleti csoportban a számolási készség tesztjén nem történt visszaesés, noha az alapkészségek gyakoroltatása – abban az értelemben, ahogyan a szöveges feladatok általában az alapműveleti számolási készség gyakoroltatásának eszközét jelentik – nem kapott szerepet. Meggyőződésünk, hogy a problémamegoldó gondolkodás stratégiai összetevőinek kutatása a matematika mellett más iskolai tartalmi területeken is ígéretes és fontos vizsgálati terepet jelent a közeljövőben.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás az OTKA 63360. sz. projekt keretében valósult meg. Köszönjük a kézirat korábbi változatához fűzött értékes kritikai megjegyzéseket *Lieven Verschaffel*nek, *Kárpáti Andreá*nak, *Szendrei Juliann*ának és *Paul Andrews*nak. A Clark Drawing Test feladatának értékelését *Pataky Gabriella* végezte. Köszönjük a kísérletben részt vevő iskolák pedagógusainak és diákjainak munkáját.

Irodalom

Berends, I. E. és van Lieshout, E. C. D. M. (2009): The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction*, **19**. 345–353.

Cohen, J. (1969): *Statistical power analysis for the behavioral sciences.* Academic Press, New York, London.

Csapó Benő (1992): *Kognitív pedagógia.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Csíkos Csaba (2003): Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10–11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, **103**. 35–55.

Csíkos, Cs. (2005): A metacogniton-based training program in grade 4 in the fields of mathematics and reading. Paper presented at the 11th European Conference for Research on Learning and Instruction, Nicosia, Cyprus, August 23–27.

Csíkos Csaba (2009): Mentális modellek és metareprezentációk matematikai szöveges feladatok megoldásában. Egy fejlesztőkísérlet elméleti alapjai. In: Kozma Tamás és Perjés István (szerk.): *Új kutatások a neveléstudományokban 2008.* MTA Pedagógiai Bizottsága, Budapest. 109–117.

Csíkos, Cs. és Steklács, J. (2010, in press): Metacognition-based reading intervention programs among 4th grade Hungarian students. In: Efkides, A. és Misailidi, P. (szerk.): *Trends and prospects in metacognition research.* Springer, US.

Diezmann, C. M. (2005): Primary students' knowledge of the properties of spatially-oriented diagrams. In: Chick, H. L. és Vincent, J. L. (szerk.): *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Volume 4. PME, Melbourne. 281–288.

English, L. D. (1996): Children' construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *Journal of Mathematical Behavior*, **15**. 81–112.

Goldin, G. A. és Kaput, J. (1996): A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In: Steffe, L., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G. és Greer, B. (szerk.): *Theories of mathematical learning.* Erlbaum, Hillsdale. 397–430.

Hegarty, M. és Kozhevnikov, M. (1999): Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, **91**. 684–689.

Johnson-Laird, P. N. (1983): *Mental Models: Toward a Cognitive Science of Language, Inference and Consciousness.* Harvard Cognitive Science Series. Volume 6. Harvard University Press, Cambridge.

Józsa Krisztián és Székely Györgyi (2004): Kísérlet a kooperatív tanulás alkalmazására a matematika tanítása során. *Magyar Pedagógia*, **104**. 339–362.

Kárpáti Andrea (2001): *Firkák, formák, figurák. A vizuális nyelv fejlődése a kisgyermekkortól a serdülőkorig*. Dialóg Campus Kiadó, Budapest.

Kozéki Béla és Entwistle, N. J. (1986): Tanulási motivációk és orientációk vizsgálata magyar és skót iskoláskorúak körében. *Pszichológia*, **86**. 6. sz. 271–292.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M. és Mayer, R. E. (2002): Revising the visualizer-verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruction*, **20**. 47–77.

Mayer, R. E. és Hegarty, M. (1996): The process of understanding mathematical problems. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *The nature of mathematical thinking*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah. 29–53.

Morris, S. B. (2005): Effect size estimation from prestest-posttest-control designs with heterogeneous variances. Paper presented at the 20th Annual Conference of the Society for Industrial and Organizational Psychology, Los Angeles, CA.

Révész György, Bernáth László és Séra László (1995): A Paivio-féle „individual Differences Questionnaire" magyar változata. *Magyar Pszichológiai Szemle*, 5–6. sz. 327–344.

Sáenz-Ludlow, A. és Walgamuth, C. (1998): Third-graders interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, **35**. 153–187.

Selter, C. (1998): Building on children's mathematics – A teaching experiment in grade three. *Educational Studies in Mathematics*, **36**. 1–27.

Speelman, C. (1998): Implicit expertise: Do we expect too much from our experts? In: Kirsner, K. és mtsai (szerk.): *Implicit and explicit mental processes*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey, London. 135–147.

Sperber, D. (1999): Metarepresentation. In: Wilson, R.A. és Keil, F. C. (szerk.): *The MIT Encyclopedia of the Cognitive Sciences*. The MIT Press, Cambridge, MA és London. 541–543.

Van Dooren, W., Verschaffel, L. és Onghena, P. (2003): Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, **6**. 27–52.

Van Meter, P. és Garner, J. (2005): The promise and practice of learner-generated drawing: Literature review and synthesis. *Educational Psychology Review*, **17**. 285–325.

Van Meter, P., Aleksic, M., Schwartz, A. és Garner, J. (2006): Learner-generated drawing as a strategy for learning from content area text. *Contemporary Edcuational Pschology*, **31**. 142–166.

Verschaffel, L. és De Corte, E. (1997): Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? In: Nunes, T. és Bryant, P. (szerk.): *Learning and teaching mathematics: An international perspective*. UK: Psychology Press, Hove. 69–97.

Verschaffel, L., De Corte, E. és Lasure, S. (1994): Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, **7**. 339–359.

Verschaffel, L., Greer, B. és De Corte, E. (2000): *Making sense of word problems*. Swets és Zeitlinger, Lisse, The Netherlands.

Verschaffel, L., Greer, B. és Torbeyns, J. (2006): Numerical thinking. In: Gutiérrez, A. és Boero, P. (szerk.): *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Sense Publishers, Rotterdam. 51–82.

ABSTRACT

CSABA CSÍKOS, JUDIT SZITÁNYI AND RITA KELEMEN: PROMOTING THE ROLE OF VISUAL REPRESENTATIONS IN MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING. RESULTS OF AN INTERVENTION STUDY AMONG YEAR 3 PUPILS

The study focuses on an intervention program that was developed to improve pupils' achievement in word problem solving using tasks and methods that support the use of schematic drawings. Five experimental groups and six control groups of Year 3 pupils participated in the experiment. Arithmetic skill and word problem tests were used as both pre- and posttests, and the experimental group also completed the first task in Clark's Drawing Abilities Test. During the intervention programme, pupils solved 73 word problems and were required to make and/or analyse drawings in each case. The intervention programme contained 20 lessons, providing a systematic review of the different types of word problems. Our results suggest that the intervention programme proved successful owing to significant development in the experimental group compared to the control group. Our programme was effective in fostering the development of not only word problem solving, but also the development of arithmetic skills. The effect of the programme in the experimental group was independent of pupils' drawing skills.

Magyar Pedagógia, **110**. Number 2. 149–166. (2010)

Levelezési cím / Address for correspondence:
Csíkos Csaba, SZTE BTK Neveléstudományi Intézet, H–6722 Szeged, Petőfi S. sgt. 30–34.
Szitányi Judit, ELTE TÓK Matematikai Tanszék, H–1126 Budapest, Kiss János altb. u. 40.
Kelemen Rita, SZTE BTK Neveléstudományi Intézet, H–6722 Szeged, Petőfi S. sgt. 30–34.