MAGYAR PEDAGÓGIA
101. évf. 3. szám 319–345. (2001)

BIZONYÍTÁSI STRATÉGIÁK MEGÍTÉLÉSE 10-17 ÉVES KORBAN

Csíkos Csaba
Szegedi Tudományegyetem, Pedagógiai Tanszék

Mindannyiunk gondolkodásának fontos jellemzője, hogy képesek vagyunk állítások igazságát önmagunk és mások számára nyilvánvalóvá tenni. Egyes esetekben (ilyen például a Pitagorasz-tétel) az állítást az állítás nyilvánvalóvá tételével együtt tanuljuk meg, míg más esetekben nekünk kell az állítást is megfogalmazni, és azt is, hogy hogyan lehet eldönteni annak igazságát.

A hétköznapi tapasztalat szerint a kisgyermekek a körülöttük lévő világról szóló állításaik legitimitását vagy a tapasztalatból, vagy egy felnőtt tekintélyéből merítik. Felnőttkorban is jellemző, hogy a számunkra kevésbé ismert területen nem kívánunk sem empirikus bizonyítékok után kutatni, sem logikus gondolatmenetet alkalmazva nyilvánvalóvá tenni egy állítást, hanem tekintélyelvű az érvelésünk. Jelentős különbség a kisgyermek érveléséhez képest, hogy tudjuk, a tekintélyelvű érvelés kevésbé értékes, mint a példákkal alátámasztás és a logikus igazolás. A mi kultúrkörünkben a deduktív bizonyítások számítanak a legkifinomultabbnak. Az állítás igazságértékét alátámasztó, valószínűbbé tevő empirikus bizonyítások sok szempontból kevésbé értékesek.

A kutatásunk alapkérdése az volt, hogy hogyan fejlődik egy olyan képesség-rendszerünk, amelynek funkciója állítások igazságértékének igazolása. Kiindulásként feltételeztük, hogy a filozófia, a matematika és a jogtudomány bizonyítás-fogalmából megalkotható egy pedagógiai-pszichológiai bizonyítás-fogalom, amely az állítások igazolásával kapcsolatos gondolkodás méréséhez alapot jelenthet. Erre a pedagógiai-pszichológiai bizonyítás-fogalomra és a kognitív képességek kutatásával kapcsolatos eredményekre épül a bizonyítási képesség mint többszintű hierarchikus képesség-rendszer modellje.

A bizonyítási képességen belül két fontos al-komponensrendszert különböztetünk meg: bizonyítások értékelésének és bizonyítások konstruálásának képességét. Úgy véljük, a bizonyítások értékességének megítélése nagymértékben meghatározza, hogy amikor nekünk kell egy állítás igazságértékét igazolnunk, a lehetséges sémák közül melyiket használjuk föl. Vannak ugyan empirikus adataink bizonyítások konstruálásának képességével kapcsolatban is (*Csíkos*, 2000), de azon a területen még nem készültek tesztelméleti (pszichometriai) szempontból megfelelően működő mérőeszközök.

Alaphipotézisünk, hogy a bizonyítási képesség fejlődése evolúciós hasonlattal írható le. Az egy időben különböző tartalmakon működő bizonyítási sémáink közül egyesek megerősítést nyernek, és így más tartalmakon is egyre gyakrabban kerülnek felhasználásra, míg más sémáink fokozatosan háttérbe szorulnak. A bizonyítási képesség fejlődését és a fejlesztés lehetőségeit ezért nagymértékben meghatározza az egyes bizonyítási sémák értékéről a tanulók felé áramló információ. Azt állítjuk tehát, hogy a fejlődés nagyrészt belső szelekció eredménye, amelyre nagy hatással van az iskola értékrendszere.

A bizonyítási képesség fejlődésével kapcsolatos alapvetésünk szerint a kisgyermek, aki elsősorban tekintélyelvű és empirikus bizonyításokat használ, az enkulturáció folyamatában megtanulja, hogy a tekintélyelvű bizonyítások a legkevésbé értékesek. A gondolkodás fejlődése ugyanakkor lehetővé teszi, hogy egyre több tartalmi területen deduktív bizonyításokat adjon. Pedagógiai szempontból bizonyítások megítélésével kapcsolatban a következő kérdésekre keresünk választ tanulmányunkban: Az egyes életkori szakaszokban a gyermek hogyan ítéli meg a bizonyítástípusok értékességét? Mennyiben vezethető vissza az iskolai nevelés-oktatás hatásrendszerére, hogy a tekintélyelvű bizonyítások veszítenek értékükből és egyre inkább a deduktív bizonyítások kerülnek előtérbe?

Elméleti háttér

Bizonyításfogalmak

Az értelmező szótárak a bizonyítással kapcsolatban három területet említenek: filozófiai, matematikai és jogi bizonyításokat. Ebből adódóan első feladatunk e három bizonyításfogalom kritikai elemzése azzal a céllal, hogy az általunk használt pedagógiai-pszichológiai bizonyításfogalmat megfelelően elhelyezhessük a különféle tudományterületek értelmezései között.

A filozófiai bizonyításfogalom

A bizonyítások értelmezése átível a filozófiatörténeten; mondhatjuk, hogy minden jelentős filozófiai iskolának megvolt a maga bizonyításfogalma. A filozófiai bizonyítások alapkérdése, hogy a világról szerzett tudásunk igazságát lehet-e igazolni, és ha igen, akkor mi módon.

Az egyik legalapvetőbb bizonyítási típus a tekintélyi érvelés. Ennek értékességéről *Aquinói Szent Tamás* a Summa Theologiae I. kérdés 8. szakaszában azt írja: „A tekintélyi érvelés nem fér össze a tudomány magasrendűségével, hiszen a tekintélyi elv a leggyengébb – *Boëthius* szerint.” (*Aquinói Szent Tamás*, 1994. 47. o., eredeti: 1266–73). A tekintélyelvű érvelés ugyanakkor sok esetben teljesíti a pszichológiai jellegű meggyőzés kritériumot, amellyel kapcsolatban *Tarski* (1990. 380. o.) a következőket írta: „a XIX. század utolsó éveiig a bizonyítás fogalma elsődlegesen pszichológiai jellegű volt. A bizonyítás olyan szellemi tevékenységnek számított, amelynek célja meggyőzni önmagunkat és másokat egy mondat igazságáról.”

A tekintélyelvű érvelés meghaladását jelenti az empirikus bizonyítás, amennyiben az empirikus bizonyítások jobban kielégítik a meggyőzés pszichológiai kritériumát. Ennek egy fajtája a példákkal való alátámasztás, amely a tekintélyelvvel kiegészülve meggyőzőbbé teszi az állítást. A példákkal való alátámasztás mellett a görög filozófiában fokozatosan teret nyertek a deduktív bizonyítások is (*Földesi*, 1978). Az ógörög bizonyításelmélet adja a keretet az Elemekhez (Kr. e. 300 k.), amelyben a matematikai állításokat egyszerűbb, már nem bizonyított állításokra vezetik vissza: axiómákra és posztulátumokra (*Szabó*, 1978). Mintegy 2500 éve adottnak vehető tehát a tekintélyelvű, az empirikus és a deduktív bizonyítások hierarchikus rendszere. Az azóta eltelt időben a filozófiai bizonyításelmélet elsősorban azt a kérdést vizsgálta, hogy milyen szerepe van az indukciónak illetve a dedukciónak a bizonyításokban.

Descartes fogalmazta meg a gondolatot, hogy a deduktív eljárás csak szükséges a helyes bizonyításhoz, de kell még hozzá az axiómák hitelessége. Az alapigazságoknak evidenseknek kell lenniük, evidenciájuk az értelem intuíciójából ered. Az ókori görögök deduktív bizonyításairól az a véleménye, hogy azok nem a megismerés módszerei. Az Értekezés a módszerről függelékében így ír erről:

> „A geometriai módon való írást illetően két dolgot különböztetek meg, tudniillik a bizonyítás rendjét és elvét… A bizonyítás elve azonban kétféle: az egyik ti. az analízis, a másik a szintézis útján történő bizonyítás.” (*Descartes*, 1637/1993. 80. o.) „A régi geométerek a szintézis elvét használták. Definíciók, posztulátumok, axiómák, teorémák és problémák hosszú sorának alkalmazásával jut el a következtetéshez… A régi geométerek egyedül ez utóbbi elvet alkalmazták írásaikban, ámbár nem azért, mintha a másik teljességgel ismeretlen lett volna előttük, hanem azért (már amennyire meg tudom ítélni), hogy azt – mivel oly nagyra becsülték – mint valami titkot tartsák meg maguknak.” (*Descartes*, 1667/1993. 81. o.)

Az axiómák és tételek circulus vitiosusának problémája *Hegel* filozófiájában tisztázódott (*Földesi*, 1978). Szerinte az axiómák nem elsődleges termékei egy tudomány fejlődésének, hanem igen gyakran csak a fejlődés magasabb fokán jönnek létre. Így az axiómákból levezethető tételek azért bizonyítják az axiómák igazságát, mert ők maguk igazolásukat máshonnan (pl. más tudományokból) nyerik. Az axiómát magát is bizonyíthatják más tudományok eredményei. Ez a gondolat előképe az axióma-rendszerek matematikai jósága vizsgálatának. *Hegel* újszerűn közelíti meg az induktív és deduktív bizonyítások problematikáját. Míg korábban mások a két eljárást egymással szembeállítva vizsgálták, Hegel mint egymást kiegészítő és feltételező metódusokat tekinti ezeket, amelyek külön-külön önmagukban nem vezethetnek eredményre.

John Stuart Mill szerint az indukció minden bizonyítás nyílt vagy rejtett alapeleme. Hegellel szemben az axiómák hitelét nem más tudományokból származtatja, hanem az emberi tapasztalatból.

A *Mill* és *Gödel* közti időszakban a neopozitivista áramlathoz tartozó Bécsi Kör filozófusai egyrészt a bizonyíthatóság problémáját elemezték, másrészt élénken foglalkoztatta őket, hogy hogyan lehet meggyőződni az axiómák helyességéről. Bizonyíthatóság helyett a Bécsi Kör filozófusainál a *verifikálhatóság* és konfirmálhatóság válnak kulcsszóvá. A verifikálhatóság elvéről világosan ír *Schlick* a „Pozitivizmus és realizmus” tanulmányában: „Ha egy mondatot elvileg nem tudok verifikálni, vagyis abszolúte nem tudom,... mit kell tennem, hogy igaz vagy hamis voltát kiderítsem, akkor nyilván egyáltalán nem tudom, hogy mit állít a mondat.” (*Schlick*, 1932–33/1972. 101. o.) „Azoknak a körülményeknek a megadása, amelyek között egy mondat igaz, ugyanaz, mint értelmének megadása, és semmi más.” (*Schlick*, 1932–33/1972. 102. o.) *Schlick* munkásságának egyik központi gondolata, hogy különbséget szükséges tenni hamis és értelmetlen állítások között.

A Bécsi Kör és napjaink között hidat képezve *Popper* és *Lakatos* témánkhoz kötődő gondolatait idézzük fel. *Popper* (1997) az indukciónak adott tudománytörténeti szempontból mérföldkőnek számító értelmezést a falszifikációs elv tanának kidolgozásával. *Hume*-hoz hasonlóan szkeptikus a megismerés lehetőségeit illetően: nincs végső tudományos igazság, az egymással versengő elméletek közül azt fogadjuk el, amelyet még nem cáfoltak meg. Ezért a megismerés útja nem igaznak vélt állítások verifikálása, hanem a falszifikálásra törekvés. *Lakatos* (1981) híres könyvében, a „Bizonyítások és cáfolatok”-ban tudománytörténeti példával illusztrálja, hogy egy állítás igazolása során a deduktivízmus akár a zsákutcát is jelentheti a heurisztikus gondolatmenettel szemben. *Lakatos* könyve – bár mondanivalóját illetően filozófiai indíttatású – a matematikatanítás módszertanának egyik alapművé vált.

A matematikai bizonyításfogalom

A matematika bizonyításfogalma (amely az évszázadok során sokszor a filozófiai bizonyításfogalommal karöltve fejlődött) hosszú történeti fejlődésen ment keresztül (*Hanna*, 1989, 1996; *Hanna* és *Jahnke*, 1993; *Markel*, 1994). A XIX. századig a pszichológiai jelleg volt meghatározó: Valamit világossá tenni, mások számára megmutatni olyan állítások, tények segítségével, amelyeket korábban igaznak fogadtunk el (*Tarski*, 1990). Ez a helyzet mára megváltozott, és a matematikai bizonyítások formalizálásának fontossága új tudományágak (matematikai logika, meta-matematika) kifejlődéséhez vezetett (*Barwise*, 1977; *Schütte*, 1977). A század közepétől azonban többen is hangsúlyozták, hogy a merev formalizmus nem írja le a matematikai gondolkodás valódi természetét (*Lakatos* 1981; *Pólya* 1957, 1988). Ezekben a matematikatanítás módszertana számára is fontos gondolatokat tartalmazó könyveikben *Pólya* és *Lakatos* felhívták a figyelmet a nem-deduktív módszerek matematikai alkalmazásának fontosságára.

A matematikai bizonyítások története egyidős a matematika történetével. A bizonyításokban szereplő fontos elemek (definíciók, axiómák, posztulátumok, tételek) következetes használata az *Euklidesz* nevéhez kötött, de valójában hosszú évszázadok matematikai tudását akkumuláló Elemekben figyelhető meg először.

Az ógörög matematika bizonyításfogalma nem tudta rányomni bélyegét a következő századok matematikájára. Ennek magyarázatát abban látjuk, hogy a reneszánsz matematikája az arab matematikára épült, és nem az ógörögre. Az arab algebra viszont *Al-Khvarizmi* könyvén alapszik, amelyben a szerző „elfordult a *görög tudományosságtól*”, mivel az egyszerű emberek számára érthető könyvet akart írni (*van der Waerden*, 1977. 426. o.) Az elfordulás másik oka az volt, hogy „a szigorúan klasszikus stílusú írásbeli megfogalmazásnál… a bizonyítások következetesek, de nem szuggesztívek.” (*van der Waerden,* 1977. 428. o.)

A XIX–XX. század fordulóján vált egyre sürgetőbb igénnyé a matematikai bizonyítások szilárd alapra helyezése. Ebben jelentős szerepe volt a *Bolyai-Lobacsevszkij*-geometria XIX. századi megjelenésének, amely nyilvánvalóvá tette, hogy a geometria felépítésére többféle axiómarendszer is alkalmas. Később a halmazelmélet ellentmondásosságának feloldására irányuló erőfeszítések és a számfogalom tisztázására irányuló axiomatizáló törekvések együttesen vezettek a matematikai bizonyításelmélet megjelenéséhez (*Ruzsa* és *Urbán*, 1966). A XX. század elejére a matematikai bizonyításfogalom a pszichológiai jellegétől megszabadulva eljutott oda, hogy matematikai eszközökkel vizsgálhatóvá vált az, hogy egy állítás igazsága csak az axiómáktól és a következtetési szabály(ok) jóságától függ-e (*Tarski*, 1990).

Az axiómarendszer ellentmondásmentességének és függetlenségének elemzéséhez szükséges meghatározni azt, hogy mit értünk a matematikában bizonyítás alatt. A következő definíció ennél kisebb célt tűz maga elé: megmondjuk, hogy a matematikában mikor tekinthető egy állítás deduktív módon levezethetőnek (*Schütte*, 1977. alapján):

A matematikában egy állítás deduktív módon való levezethetőségére egy induktív definíciót fogalmazunk meg:

1) Az axiómákat deduktív módon levezetettnek tekintjük.

2) Ha egy elemi következtetés premisszája deduktív módon levezethető, akkor a konklúzió is.

3) Az axiómákból véges sok lépésben kell eljutni a bizonyítandó állításhoz.

A bizonyítás a matematikában azt jelenti, hogy megmutatjuk (demonstráljuk) az állítás deduktív módon való levezethetőségét. Ez a gyakorlatban nem jelenti azt, hogy minden egyes állítást véges sok lépésben visszavezetünk axiómákra, csupán azt kell demonstrálni, hogy ez lehetséges lenne. *Bourbaki* szerint a matematikus a valóságban „általában megelégszik azzal, hogy a leírást olyan alakra hozza, melyben a matematikai tapasztalata és érzéke már sugallják, hogy a formalizált nyelvre való áttérés már csak rutinkérdés” (idézi *Trosztnyikov*, 1981. 179. o.).

Az axiómarendszerek vizsgálatával úgy tűnt, hogy a matematika biztos talajra építhet. 1931-ben azonban *Gödel* megmutatta, hogy a *Russell* és *Whitehead* Principia Mathematica művében szereplő axiómarendszer ellentmondástalansága nem bizonyítható az axiómarendszer keretein belül (*Ruzsa* és *Urbán*, 1966). A Gödel-tétel más axiómarendszerekre is igaz, és ez a matematikába vetett hit megingásához vezetett. Erre az időszakra datálódik az intuicionista matematika megjelenése, amely a bizonyításokban kevesebb eszközt engedett meg, ezáltal azt remélve, hogy az eszközeivel bizonyított állítások biztosabban igazak.

Gödel úgynevezett nem-teljességi tételének következménye az a szkepticizmus, amely a mai matematikai filozófiában is megfogalmazódik: „Ha a bizonyítás-fogalom egy lépésről lépésre történő érvényes dedukciót is jelentene, mindig lehetséges kritikát megfogalmazni a rendszer ellentmondásmentességét, a relevanciáját vagy a közlés módját illetően” (*Tymoczko*, 1986).

A deduktív axiomatikus matematika más irányú meghaladását jelenti az experimentális matematika. Követői elismerik, hogy az irányzat részben nélkülözi a deduktivitás szigorát, ám egyes problémák vizsgálatára hatékony eszközt jelenthet a fizikai experimentalizmushoz hasonló – általában számítógéppel támogatott – kísérletezés. A kísérletek baconiak, abban az értelemben, hogy nem szolgai megfigyelésről van szó, hanem valamely elmélet keretébe ágyazva történik az adatok interpretálása (*Borwein, Borwein, Girgensohn* és *Parnes*, 1996).

A jogi bizonyításfogalom

A bizonyítás fogalmát a jogtudomány is igen széles körben használja. *Katona* (1990. 22. o.) szerint azonban „a területen jelentős terminológiai zűrzavar uralkodik”. A jogtudomány álláspontja szerint a jogi bizonyításfogalom elviekben megfelel a más tudományokban használt bizonyításfogalomnak, azaz a bizonyítások induktív információszerző folyamatokat felhasználó deduktív bizonyítások, hasonlóan más tudományok bizonyításaihoz. Honnan eredeztethető akkor a közvélekedés szkepticizmusa a bizonyítások objektivitásával szemben? A védő és az ügyész ugyanis gyakran mintha nem ugyanarról beszélnének. A kulcsot a „bizonyítási eszközök szabad mérlegelésének elvé”-ben találhatjuk meg. Ebből az alapelvből következik, hogy a büntetőeljárásokban nem lehet előre, általános érvénnyel meghatározni a bizonyítási eszközök bizonyító erejét, hanem az mindig a konkrét ügytől függ (*Katona*, 1990).

Lawrence (1991) szerint a bírósági ítéletek elsősorban attól függnek, hogy az információt milyen módon tálalják. A tárgyaláson részt vevők gyakran heurisztikus gondolatmeneteket alkalmaznak, mivel a hallgatóság és az esküdtek számára az az érvelés meggyőzőbb, amelyben egy ismerős történetsémához kapcsolódva olyan állítások vannak logikus következtetések láncolatává fűzve, amelyek alátámasztják az érvelő által már korábban kialakított álláspontja a bűnösségről/ártatlanságról.

A bizonyítások pedagógiai-pszichológiai szempontú értelmezése

A bizonyítást pszichológiai szempontból (összhangban a filozófiai, matematikai és jogi értelmezéssel) állítások igazságának igazolásával kapcsolatos tevékenységként értelmezzük. A bizonyítási képesség egyrészt bizonyítások megítélését, másrészt bizonyítások konstruálását teszi lehetővé.

A bizonyításokkal kapcsolatos pedagógiai-pszichológiai szakirodalomban több kifejezés egymás szinonimájaként használatos. Ezek között viszonylag gyakran találkozhatunk az érveléssel (argumentációval). *Wittman* (idézi *Ambrus*, 1993) felfogásában az *argumentáció* bővebb fogalom, mint a bizonyítás, és magában foglalhat nem-deduktív elemeket is. *Mariotti* (1998) az argumentáció értelmezése során a funkció felőli megközelítést választja. Szerinte akkor beszélünk argumentációról, amikor a cél a meggyőzés; meggyőzni valakit egy állítás igazságáról. Az argumentációval szembeállítva értelmezi a demonstrációt, amely közelebb áll a formális bizonyításhoz, mivel a matematikusok által elfogadott következtetési szabályok szerint történik.

Ma többen is hangsúlyozzák azt a funkcionális különbséget, amely a matematikusok bizonyításai és az osztálytermi bizonyítások között fennáll. Az első esetben a *meggyőzés* funkciója domborodik ki, ellentétben az osztálytermi bizonyítások *magyarázó* szerepével (*Hersh*, 1993; *Chazan*, 1993). A két cél természetesen legtöbbször egymásba fonódik, mégis tetten érhető formai különbség a tudóstársaknak szóló bizonyítás és a megértést elősegítő, didaktikai szempontból átformált bizonyítások között. Ilyen formai különbségtételt találunk például a Lebesgue-integrállal kapcsolatos eredeti Lebesgue-féle bizonyítások és a *Riesz Frigyes* által kimunkált, a didaktikai alapelveket jobban szem előtt tartó bizonyítások között.

A matematikai bizonyítások lélektanának elemzése során napvilágra került, hogy a matematikai megismerés folyamata és a bizonyítás végső formába öntése teljesen más gondolkodási folyamatokat igényel. Említettük, hogy erre már *Descartes* is felfigyelt, és vagy matematikusok (pl. *Newton, Hadamard, Poincaré*, *van der Waerden*) önreflexiói, visszaemlékezései alapján is azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a tényleges gondolkodási folyamatok alapvetően különböznek attól, amit a végső, formális bizonyítás tükröz (ld. *Dreyfus és Eisenberg*, 1998; *Hanna és Jahnke*, 1993).

A bizonyítási képesség értelmezése

A kognitív kompetenciának azt a rész-komponensrendszerét, amely lehetővé teszi állítások igazságértékének igazolását, és ezzel összefüggésben bizonyítások megértését, értelmezését, bizonyítási képességnek nevezzük. Állítások igazságértékének igazolását a nyelvileg megformált állításokra korlátozzuk.

Alaphipotézisünk, hogy *a bizonyítási képesség többszintű, hierarchikus képességrendszer*. *Marr*-i fogalmakat is felhasználva *hardver-, algoritmikus* és *stratégia-szint*ekről fogunk beszélni. Ez a rendszer összevethető *Nagy József* (2000) hierarchikus szabályozási szintjeinek rendszerével, ahol három – a neurális szabályozásra épülő – szint szerepel: implicit tapasztalati, implicit fogalmi és explicit előíró szabályhasználatot. A bizonyítási képesség szempontjából a *Nagy József*-i implicit tapasztalati szintet a hardverszinthez soroljuk.

A kétféle rendszer kompatibilitását a következő konkrét példákkal támasztjuk alá: (1) Explicit előíró szabályhasználat szintjéhez (= stratégia-szinthez) tartozik az a tudásunk, hogy a modus ponens következtetési szabály logikai értelemben érvényes deduktív szabály. (2) Az implicit fogalmi szinthez (= algoritmikus szinthez) tartozó példa: Tudjuk, hogy ha Peti megkapja a zsebpénzét, moziba megy. Peti megkapta a zsebpénzét. Ebből következik, hogy Peti moziba megy. (3) Az implicit tapasztalati szinthez (= hardver-szint egy részéhez) tartozó példa: Ha villámlást észlelünk – anélkül, hogy tudatában lennénk – hallásunk felkészül a mennydörgés észlelésére, mivel elménkben működik egy implicit tapasztalati szabály (amely igen gyorsan implicit fogalmivá alakítható), mely szerint: „Ha villámlik, akkor kis idő múlva dörög az ég.” A *hardver-szint* a gondolkodás fiziológiai alapjait és az arra épülő tudattalan gondolkodási folyamatokat jelenti. A bizonyítási képesség szempontjából ide sorolunk egyes nem-verbális folyamatokat, amelyek között kiemelkedő jelentőséget tulajdonítunk az oksági gondolkodás perceptuális alapjainak. Ennek rövid bemutatására vállalkozunk először. Az oksági gondolkodás azért különösen jelentős a bizonyítási képesség szempontjából, mert a verbalizált állítások és bizonyítások során „Ha …, akkor …” típusú állítások fordulnak elő, és az ilyen szerkezetű mondatok gyakran oksági kapcsolatok kifejezői.

Michotte (idézi *Csibra*, *Gergely* és *Nádasdy*, 2000. 60. o.) szerint: „Az oksági észlelés alapja a tárgyak mozgásának egysége és a tárgyak duplicitása közti konfliktus.” *Csibra*, *Gergely* és *Nádasdy* (2000. 71. o.) kísérlete szerint az „oksági viszony nem más, mint az az információ, hogy az egyik tárgy mozgását át kell helyezni a másik tárgyra a tárgyfogalmunknak megfelelő világ koherenciájának megtartása érdekében.” Az említett tárgyfogalomra az jellemző, hogy az észlelőrendszer nem tárgyakat lát, hanem mozgásokat, és ahhoz rendeli hozzá a tárgyakat. A bizonyítási képesség szempontjából tehát a hardver-szinten megtörténik a mozgások, változások észlelése, és a mozgásokhoz rendelt tárgyak vonatkozásában a hardver-szint oksági viszonyt érzékel.

Az *algoritmikus szint*hez tartozó jelenségek, folyamatok meghatározása a bizonyítások során gyakran használt nyelvi-logikai eljárások ismeretét igényli. Ezek a nyelvi-logikai eljárások modellezhetők a kétváltozós kijelentés-logika műveleteivel és következtetési szabályaival (*Csapó*, *Csirikné* és *Vidákovich*, 1987). A gondolkodás ilyen szempontú modellezése a deduktív gondolkodás kutatásának területéhez tartozik.

A bizonyítási képesség *stratégia-szint*jének értelmezéséhez a deduktív gondolkodással kapcsolatban használt 'meta-' fogalmak áttekintése szükséges. *Johnson-Laird* és *Byrne* (1991) metalogikának nevezik a logikáról szóló explicit tudást, és metadedukciónak azt a képességünket, hogy tudunk mások dedukcióiról gondolkodni. *Moshman* (1990) felfogása szerint metalogikai stratégiákat és metalogikai megértést különíthetünk el. A két nevezéktan közös vonása, hogy mindkét modell a deduktív gondolkodás egyszerűbb összetevőiből építkezik, valamint egyik sem szól arról, hogy hogyan lehet a metalogika illetve metadedukció fogalmát a metakogníció általános fogalomkörébe beilleszteni.

A deduktív gondolkodás meta-szintjét jelentő metalogika és metadedukció egymással sem kompatíbilis fogalmak. A metalogika *Moshman* (1990) szerint a deduktív gondolkodás fejlődésének azt a szintjét jelenti, amikor az egyén képes tudatosan megkülönböztetni a premisszákat és a konklúziót, s ezzel képessé válik metalogikai stratégiák használatára. Egy metalogikai stratégia például a *reductio ad absurdum* bizonyítási séma használata. A metalogikai gondolkodás másik aspektusa Moshman szerint a metalogikai megértés, amely azt jelenti, hogy az egyén képes a logika természetéről, a logikai és a természetes nyelvek kapcsolatairól gondolkodni. A moshmani nevezéktan két fogalma, a metalogikai stratégiák és a metalogikai megértés, emlékeztet *Flavell* (1987) metakogníciós elméletére, amelyben metakognitív tudásról és metakognitív tapasztalatról ír.

A metadedukció fogalomköre a mások dedukcióiról való gondolkodásra utal. Ezzel kapcsolatban annak az észrevételünknek adunk hangot, hogy (1) A mások dedukcióiról való gondolkodás állandóan jelen van a gondolkodásunkban (*Rips*, 1994), és (2) meg kell különböztetni a mások dedukcióiról gondolkodást hétköznapi környezetben és a laboratóriumok logikai fejtörőinek megoldása közben. Úgy tűnik ugyanis, hogy a metadedukció fogalom a *Smullyan* (1978/1988), majd a pszichológiai hátteret illetően *Rips* (1983) által divatba hozott logikai puzzle-ök elemzésére használatos.

Módszerek

Az 1944 tanuló részvételével 1999 májusában lezajlott nagymintás felmérés „A gondolkodás fejlődése" nevet kapta. A „nagymintás" jelző a vizsgálat nevében nem elsősorban a résztvevők nagy létszámára utal, mivel az előfelmérés (*Csíkos*, 1999) is hasonló méretű mintán zajlott, hanem arra, hogy a minél több féle válaszlehetőség megjelenését célul kitűző előfelméréssel szemben a minta nagysága itt elsősorban a statisztikai elemzések szignifikanciáját befolyásoló tényező volt.

A felmérésben öt magyarországi megye vett részt, megyénként és évfolyamonként 2–3 osztállyal. Mivel a 10–17 éves korosztály tudása volt a kutatás tárgya, 5., 7., 9. és 11. évfolyamos tanulók vettek részt a felmérésben. A 9. és 11. évfolyamokon nagyjából egyforma létszámban szerepeltek gimnáziumi és szakközépiskolai tanulók.

A felmérésben szereplő mérőeszközök közül jelenlegi témánk szempontjából a matematikai állításokat és a hozzájuk tartozó bizonyításokat tartalmazó „Bizonyítási feladatok” teszt és a „Gondolkodtató feladatok” teszt első két feladata releváns. A „Bizonyítási feladatok” és a „Gondolkodtató feladatok” tesztjei valamennyi évfolyamon egységesek voltak. A matematikai bizonyításokat tartalmazó „Bizonyítási feladatok” teszt nem került bemérésre ötödik osztályban, mivel az első egyszerű matematikai bizonyítások, amikor a tanulók explicite találkoznak a bizonyítás szóval, általában hetedik osztályban jelennek meg.

Mindkét bizonyítási teszt egy változatban készült. A „Természettudományos gondolkodás” tesztjével karöltve két egymás utáni tanórán oldották meg a tanulók mindkét tesztet, az osztály egyik fele először az egyiket, másik fele a másikat, majd fordítva.

A bizonyítási képesség tesztjeinek feladatai

A bizonyítási képesség két tesztje tartalmi és formai szempontból is különbözött egymástól. A „Bizonyítási feladatok” teszt matematikai állításokat és azokra adott bizonyításokat tartalmazott, a „Gondolkodtató feladatok” teszt nem-matematikai állításokat és bizonyításokat, a deduktív gondolkodást mérő feladatokat, valamint néhány nyíltvégű bizonyítási feladatot tartalmazott. A „Bizonyítási feladatok”-hoz egy matematikai bizonyításokkal kapcsolatos kérdőív is tartozott, amelyet *Almeida* (1995) tanulmányából adaptáltunk. Tanulmányunkban a „Bizonyítási feladatok” teszten, valamint a „Gondolkodtató feladatok” teszt első két feladatán elért eredményeket elemezzük.

A „Bizonyítási feladatok” teszt

A „Bizonyítási feladatok” teszt matematikai állításokat és ezek különféle bizonyításait tartalmazta. A tanulók feladata az volt, hogy ötfokú skálán értékeljék (szó szerint: „osztályozzák”) a bizonyításokat. A válaszlehetőségek konstruálása során ötféle bizonyítást látszott célszerűnek megfogalmazni. Ezt részben az indokolta, hogy az egyes bizonyítások értékelése során a tanulók ne kényszerüljenek arra, hogy egy osztályzatot több esetben is kiosszanak. Másrészről az ötféle bizonyítástípust a *Harel* és *Sowder* (1998) modelljére épülő fejlődési bizonyításkategorizálási modellünk alapján határoztuk meg. Az öt bizonyítástípus, amely a „Bizonyítási feladatok” és a „Gondolkodtató feladatok” teszt első két feladatában egyaránt szerepeltek: tekintélyelvű, rituális, szimbolikus, empirikus és deduktív.

Az egyes állításokhoz tartozó öt opció kijelölésével kapcsolatban felvetődik az objektivitás és a validitás problémája is. Jelen esetben a teszt jóságának ez a két dimenziója egymással is összefügg. Mennyiben befolyásolta a kapott eredményeket az, hogy egy-egy állításnál éppen milyen konkrét válaszmintázat került a tesztlapra? Ahol csak lehetett, az előfelmérésből származó valós válaszmintázat szerepelt. Ahol viszont nem volt ilyen, ott a válasz megszerkesztése során a mondat nyelvezetében figyelembe vettük, hogy egy tizenéves hogyan fogalmazná meg a bizonyítást az adott témakörben.

A következőkben először a „Gondolkodtató feladatok” teszt 1. feladatát mutatjuk be részletesen. Az 1. feladatban szereplő állítás a következő volt:

A 2 az egyetlen páros prímszám.

Az előfelmérés bizonyította, hogy a tanulók nyíltvégű kérdésfeltevés esetén is igen változatos bizonyítási stratégiákat alkalmaznak, ezért a feladatban szereplő öt válaszlehetőség megszerkesztése során nagymértékben támaszkodhattunk a korábban ténylegesen előforduló tanulói válaszokra.

Az 1. feladat *tekintélyelvű* bizonyítása:

Ez valóban igaz. A 2 az egyetlen páros prímszám. A múlt órán tanultuk ezt a tételt, és a feladatok megoldásakor sokszor fölhasználható. Ez egy valóban fontos matematikai bizonyítás.

A tekintélyelvű bizonyítások jellemző jegyeit (az állítás megismétlése megerősítéssel, a tanári tekintély említése, a tétel fontosságának említése) mind felsorakoztattuk ebben a bizonyításban, részben azért is, hogy terjedelmileg ne legyen feltűnően rövidebb a többi opciónál.

Az 1. feladat *rituális* bizonyítása:

Tegyük fel, hogy van másik prímszám is, amelyik páros. Ez nem lehet, mert a prímszámok nem lehetnek páros számok, mert az kizáró ok. A prímszámokra éppen az jellemző, hogy nem páros számok, hanem páratlan számok. Van olyan páratlan, amelyik prím, de ott sem mindegyik. A páros számok között a 2 az egyedüli, amelyik prím lehet, de csak azért, mert olyan kicsi szám.

A rituális bizonyításokra jellemző, hogy a tanuló tudja, a bizonyításnak valamiféle formai követelményeket kell kielégítenie, de nem tartalmaz a bizonyítás érdemi előrelépést az állítás igazságának megmutatása felé. Megfigyelhető az opcióban a rituális bizonyítások egy másik jellemző eleme, az önellentmondáshoz vezető szószaporítás.

Az 1. feladat *szimbolikus* bizonyítása:

Legyen x a legkisebb páros prímszám. Ha x=2, akkor állításunkat bizonyítottuk. Ha x≠2, akkor az nem lehetséges, mert x-nél kisebb prímszám nincs. x-nél nagyobb sem lehet, mert az már nem lenne a legkisebb.

A szimbolikus bizonyításokra a matematikai jelek értelemtől megfosztott használata jellemző. Viszonylag gyakori jelenség, hogy a tanulók minden alap nélkül bevezetnek egy jelölést, például x-et, és annak használatához való görcsös ragaszkodásuk hibát okoz a gondolatmenetben. A konkrét esetben egy bizonyítatlan előfeltevésre épül az x jelölés bevezetése, majd a bizonyítás lényegében rituálisan folytatódik.

Az 1. állítás *empirikus* bizonyítása:

> *A 2 tényleg prímszám, mert csak 1-gyel és önmagával osztható. Érdekes dolog, hogy nincs másik prímszám, amelyik páros. De az is igaz, hogy nincs másik páros szám, amelyik prím, csak a 2.*

Az empirikus bizonyítás egyik jellemzője lehet, hogy az állítást részben igazolja. Ez történt ebben az esetben is. Az „érdekes dolog” mondatkezdést egy következő vizsgálatban feltétlenül módosítanám, mert a tanulók szemében minden bizonnyal rontja a bizonyítás értékét a familiáris nyelvezet.

Ahogyan *Balacheff* (1988), *Harel* és *Sowder* (1998) is rámutatnak, többféle empirikus bizonyítás van. Igazán szembeötlő különbség az empirikus és deduktív bizonyítások között akkor fedezhető fel, ha a bizonyítandó állítás univerzális kvantort tartalmaz (pl. „bármely…”, „minden…”, „tetszőleges…”). *Tirosh* (1999) megmutatta, hogy másod- és harmadéves matematika szakos hallgatók számára az univerzális kvantort tartalmazó állítások jelentik a matematikai tételek paradigmatikus modelljét, vagyis azt a típusú tételt, ami szerintük legjellemzőbben matematikai. Érdekes kérdés lehetne, hogy vajon az empirikus és deduktív bizonyítások megítélése jelentősen különbözik-e univerzális állítások esetén, mint más típusúaknál.

Az 1. állítás *deduktív* bizonyítása:

> *A 2 tényleg prímszám, mert csak 1-gyel és önmagával osztható. A páros számok között nincs másik prím, mert a többi páros szám mind osztható 2-vel is, és akkor már nemcsak 1-gyel és önmagával osztható, hanem legalább még egy számmal.*

Az állításra adott deduktív bizonyítás jól szemlélteti, hogy gyakran nincs szükség matematikai szimbólumok használatára ahhoz, hogy korrekt bizonyítást adjunk.

A tesztben szereplő másik három feladat opcióit teljes részletességgel a Melléklet tartalmazza. A következőkben az állításokkal és egyes opciókkal kapcsolatban néhány érdekességet emelünk ki. A második állítás az egyik klasszikus iskolai geometriai tétel volt:

> *A háromszög belső szögeinek összege 180^0.*

A *Tirosh* (1999) által használt fogalom szerint ez egy valódi paradigmatikus tétel. Ilyen állítások esetén várható az, hogy az empirikus és deduktív bizonyítások között éles határvonal nyilvánuljon meg. Az opciók kiválasztásánál dilemmát jelentett, hogy az empirikus bizonyítás *Balacheff*-i (1988) értelemben a *naiv empirizmus* vagy a *döntő kísérlet* kategóriába tartozzék. Végül a *döntő kísérlet* mellett szólt, hogy az állítás univerzális volt.

A harmadik állítás az előfelmérésben is szerepelt:

Három páratlan szám szorzata mindig páratlan.

Ebben az esetben a szimbolikus bizonyítási opció szerkesztése jelentette a legnagyobb kihívást. Az előfelmérés során sok esetben előfordult, hogy a tanuló jelölések bevezetésével, tisztán formálisan próbált bizonyítani. Több esetben csupán az volt a gond, hogy nem írta le, mit jelentenek a bevezetett jelölések, ám a matematikához értők számára világos volt, a formális bizonyítás. Ezért itt egy olyan opciót kerestünk, amelyben komoly koncepcionális probléma adódik abból, ha valaki nem ismeri föl az értelem nélküli szimbólum-manipulációt.

3. bizonyítás:

Legyen a három tetszőleges páratlan szám $x+1$, $y+1$ és $z+1$. Ekkor a szorzatuk:

$$(x+1)(y+1)(z+1)=(xy+x+y+1)(z+1)=xyz+xy+xz+x+yz+y+z+1=xyz+xy+xz+yz+$$
$$+x+y+z+1$$

A szám 1-re végződik, ezért biztosan páratlan.

Itt a kulcsmomentum annak felismerése, hogy ha egy összeg utolsó tagja 1, akkor az nem jelenti szükségszerűen azt, hogy maga az összeg 1-re végződik. Ugyanakkor feltehetően növeli a bizonyítás értékét, hogy jól kivitelezett részmegoldás található benne. Ennél a feladatnál az empirikus bizonyítás a *balacheff*-i naiv empirizmus szintjét képviseli.

A 4. feladatban ismét univerzális állítást fogalmaztunk meg. Ez az állítás nem-univerzális formában már az előfelmérésben is szerepelt.

Az olyan számok, amelyek 9362... számjegyekkel kezdődnek, és utána csupa 0 áll, nem oszthatók 3-mal.

Az előfelmérésben úgy szerepelt a kérdés, hogy „Hogyan lehet bebizonyítani, hogy ha 6332-t elosztjuk 3-mal, akkor nem egész számot kapunk?”. Ebben az esetben a dichotóm kategorizálással csak azt állapítottuk meg, hogy különbség van az „Osztással” és az olyan válasz között, amely a 3-mal oszthatóság szabályára hivatkozik. Ahhoz, hogy a szabályra hivatkozást (és ezzel a háttérben lévő gondolkodási folyamatot) magasabb szintűnek értékeljük, célszerű volt univerzális kvantort tartalmazó állítást megfogalmaznunk.

A „Gondolkodtató feladatok" teszt

A „Gondolkodtató feladatok" tesztet valamennyi évfolyamon fölvettük, és minden évfolyamon ugyanazok a feladatok szerepeltek. Ez az elrendezés megkövetelte tantárgyfüggetlen vagy már az ötödikesek számára is ismerős iskolai témák használatát. Azáltal, hogy tesztünk ötödik és tizenegyedik osztályban egyaránt bemérésre került, *kifejezzük azt a meggyőződésünket, hogy a képesség jellegű tudást vizsgáló kognitív feladatoknak minden korosztályban létezhet „jó" megoldása*. A különböző évfolyamok teljesítményének összehasonlítását ugyanakkor olyan külső kritériumok szerint végezhetjük el, amely kritériumok explicit ismerete nem várható el.

A gondolkodtató feladatok tesztje – a matematikai bizonyításokhoz hasonlóan – adott állításokhoz tartozó ötféle bizonyítás értékelésével kezdődik. A tesztben szereplő két állítás az előfelmérésben szerepelt feladatokból származik. A formai egyezőség kritériumának megfelelően a bizonyítandó állítások ebben a tesztben is kijelentő formában adott igaz állítások voltak.

Most a második feladatot mutatjuk be. Az előfelmérésben ténylegesen előfordult tanulói választípusokhoz képest csak a szimbolikus opció számít mesterségesen szerkesztettnek.

Egy képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig igazat mondanak; vannak hazugok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz és hamis mondatokat. Egy éjszaka csöng a tűzoltóság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el:

Tűzoltó: Tessék, tűzoltóság.
Telefonáló: Ég a városháza.
Tűzoltó: Igazmondó vagy?
Telefonáló: Felemás vagyok.

Ezek után a tűzoltó azt állította, hogy nem ég a városháza, felesleges lenne kivonulni. Hogyan bizonyítható ez az állítás?

A *tekintélyelvű bizonyítás* az előfelmérés során gyakran előfordult a tanulói válaszok között:

Nem ég a városháza, mert ilyen komoly dologgal nem lehet viccelni. Aki ezzel tréfát űz, azt jól meg kell büntetni. Az iskolában és otthon is azt tanítják, hogy a tűzzel nem szabad játszani.

A *rituális bizonyítás* ismert jegyei („tegyük fel, hogy…" logikátlan használata, a tárgytól elkanyarodó mondathalmozás) megfigyelhetők a következő opció esetén:

> *Tegyük fel, hogy ég a városháza, Ekkor a telefonáló hangja izgatottabb lett volna, ezért nem ég a városháza. Azt azért érdemes lenne tudni, hogy a városlakók között milyen arányban vannak igazmondók, hazugok, és felemások. Az a probléma, hogy ha csak egyetlen ember is felemás vagy hazug, akkor már esély van arra, hogy feleslegesen riasztják a tűzoltókat.*

A *szimbolikus bizonyítás* lényege: matematikai jelölés bevezetésével hitelt adni a gondolatmenetnek, holott a szimbólum-manipuláció értelem nélküli.

> *Annak valószínűsége, hogy ég a városháza, legyen x. Annak valószínűsége, hogy felemás telefonált, legyen y. Ha y>x, akkor felemás telefonált. A felemás egyszer igazat mond, egyszer hazudik. Amikor azt mondta, hogy felemás, akkor igazat mondott. Ezért, amikor azt mondta, hogy ég a városháza, hazudott. Mivel y>x, ezért nem ég a városháza.*

Nem-univerzális állításról lévén szó, az *empirikus bizonyítás*ra az jellemző, hogy a teljes bizonyítás egy részét tartalmazza, mintegy alátámasztva, de nem 100%-os bizonyossággal igazolva az állítást:

> *Ha ég a városháza, akkor nem igaz az, hogy felemás. Ha nem ég a városháza, akkor lehet felemás. Mivel azt mondta, hogy felemás, ezért az utóbbi a valószínű.*

Az opció javítását szolgálná és növelné a validitást, ha a „valószínű" szó nem szerepelne a fenti gondolatmenet végén. Így ugyanis a valószínűség intuitív fogalmát is teszteljük egyúttal, amellyel kapcsolatban kevés magyarországi empirikus adatunk van.

A *deduktív bizonyítás* a logikailag lehetséges esetek szisztematikus számbavételét jelenti. Ez az opció jelenti a kulcsot abban a kérdésben, hogy milyen kapcsolat van a bizonyítástípusok megítélése és a bizonyítások konstruálása között – az empirikus kutatás szempontjából. Hipotézisünk szerint ugyanis jóval kisebb arányban adnak a tanulók deduktív bizonyítást nyíltvégű kérdés esetén, mint ahányan a legmagasabbra értékelik ezt az opciót:

> *A telefonáló nem lehetett igazmondó, mert ha az lett volna, akkor nem mondhatta volna, hogy felemás. Ha felemás volt a telefonáló, akkor igazat mondott, mikor azt mondta, hogy felemás, és hazudott, amikor azt mondta, hogy ég a városháza.*
>
> *Ha hazug telefonált, akkor mindkétszer hazudott. Ezért a városháza semmiképpen sem ég.*

Eredmények

A tesztek reliabilitása

Tesztjeink első közelítésben inkább a Likert-skálás, attitűd mérésére hivatott kérdőívekkel mutatnak rokonságot. Mivel azonban formálisan a Likert-skálás mérőeszközök itemei is tekinthetők politóm itemnek, nincs akadálya annak, hogy reliabilitást számoljunk.

Politóm itemek esetén a Cronbach-α mutató a legáltalánosabban elterjedt, amely a Kuder-Richardson-féle (*Nagy*, 1975. szerint a tudásszintmérők számára leginkább használatos) 20-as mutató általánosításának tekinthető (*Horváth*, 1990). A reliabilitás becsléséhez a „Bizonyítási feladatok” teszt formai szempontból azonos 20 iteméhez hozzávesszük a „Gondolkodtató feladatok” 10 hasonló itemét. Az így kapott 30 azonos típusú itemet a bizonyítások megítélésével kapcsolatos tudás egy tesztjének tekintjük.

A 30 itemes teszten és a 20 itemes részteszten az egyes mintákra kapott reliabilitás-értékeket az 1. táblázat foglalja össze.

1. táblázat. Reliabilitás-értékek az egyes részmintákon a 30 itemes teszten, illetve a 20 itemes részteszten

	30 itemes teszt	*20 itemes részteszt*
Teljes minta	0,80	0,76
7. évfolyam	0,72	0,67
9. évfolyam	0,76	0,71
11. évfolyam	0,75	0,72

Ismeretes, hogy a reliabilitás nem csupán a teszt jóságát fejezi ki, hanem annak a populációnak a heterogenitását is, amelyből a minta származik. Nem véletlen ezért, hogy a teljes mintán megbízhatóbban mér a teszt, mint az egyes részmintákon. Azt is tudjuk, hogy a hosszabb tesztnek jobb a reliabilitása. Pontosabban szólva, ha a teszt hosszát növeljük ugyanazt és ugyanolyan módon mérő feladatokkal, akkor a reliabilitás nő (*Horváth*, 1993). Például egy 0,75-ös reliabilitású, 30 itemes teszt a hosszának megduplázásával 0,86-os reliabilitású lesz. A táblázatban közölt értékek a reliabilitás-mutató számszerű nagyságát tekintve eleget tesznek a képességtesztekkel szemben támasztott követelményeknek (ld. *Walsh* és *Betz*, 1990).

Mit fejez ki a reliabilitás-mutató a bizonyítási képesség tesztje esetében? A reliabilitás-mutatók általában azt fejezik ki, hogy a teszt a mért tulajdonság szempontjából mennyire következetesen képes elkülöníteni egymástól az átlagos alatti és az átlag feletti teljesítményeket. A Cronbach-α mutató ezen belül egy olyan reliabilitás-becslő módszer, amely az itemek egymás közötti korrelációiból képez mutatót. Ha az α értéke megfelelő, az úgy interpretálható, hogy a teszt itemeire adott értékek konzisztensek, vagyis az itemek lényegében ugyanannak a pszichikus struktúrának működését mérik. A konkrét esetben azt mondhatjuk, hogy a bizonyítástípusok osztályozása során nyert adataink belső konzisztenciát mutatnak. Mivel a bizonyítástípusok értékelése a bizonyítási képesség egy igen fontos komponensének tekinthető, a kielégítő nagyságú α érték azt mutatja, hogy *a teszt megfelelően mér valamit, amit a bizonyítási képesség egy fontos területének tartunk.*

A „Bizonyítási feladatok"-ban nyújtott tanulói teljesítmények jellemzése

A bizonyítási stratégiák megítélésének mérésére szolgáló első tesztben matematikai állítások és azokhoz kapcsolódó öt-öt bizonyítás szerepeltek. Az eredmények ismertetése során az egyes opciókra kapott számértékeket intervallum-skálán lévőnek tekintettük. Az áttekinthetőség kedvéért az itemek sorrendje minden feladatban ugyanaz lesz a táblázatban: tekintélyelvű, rituális, szimbolikus, empirikus és deduktív bizonyítások követik majd egymást.

A 2. táblázat adatainak elemzése első közelítésben a vastaggal jelölt átlagértékek évfolyam és bizonyítástípus szerinti változási tendenciáira irányul. A táblázat nagy mérete azt indokolja, hogy néhány fontos megállapítást a táblázatból kivágott részletekkel illusztráljunk.

Az eredmények bemutatása és elemzése előtt két olyan tényezővel foglalkozunk, amelyek megléte rendkívüli óvatosságra int a következtetések levonásakor: (1) Lehetséges, hogy nagyon sok tanuló számára a bizonyítások értékelése azt jelentette, hogy megkereste a legjobb válaszlehetőséget, azt négyesre, de gyakrabban ötösre értékelte, a többi „rossz" bizonyítás között pedig kiosztotta az alacsonyabb pontszámokat. Ha igaz lenne ez a feltételezés, az elégséges magyarázatot nyújtana arra, hogy a deduktív bizonyítások esetében más életkori tendencia rajzolódik ki az adatokból, mint a többi négy típusnál. (2) A hetedikesek még nem tudják igazából, hogy az iskolában hogyan szokás ötfokozatú skálán osztályozni, ezért értékítéletük kifejeződése bizonytalan. Ez elégséges magyarázat lenne arra, hogy a hetedikesek a deduktív bizonyításokat relatíve alul-, a többi bizonyítástípust relatíve felülértékelik.

Az előbbiekben említett két tényezővel valóban számolnunk kellett az eredmények interpretációja során. Az első felvetés által jellemzett stratégia – mint később a szóbeli interjúk is megerősítették – több esetben is alapvető tesztmegoldási módszer volt. Ez a tény azért is nagyon fontos, mert alapot jelent a bizonyítási képesség fejlettségét számszerűen jellemző mutató kidolgozásához. Azonban ha igaz is lenne a legtöbb tanulóra, hogy először megkereste a legjobb bizonyítást, és a többi az alacsonyabb pontszámokat kapta, ez a felvetés nem ad magyarázatot a többi bizonyítási típus értékelésében megjelenő és következetesen megnyilvánuló különbségekre.

2. táblázat. A „Bizonyítási feladatok” teszt feladataira adott válaszok átlaga és szórása

„A 2 az egyetlen páros prímszám”										
Bizonyítás-típus	*Évfolyam*									
	7.		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s
Tekintélyelvű	2,70	1,31	1,69	1,00	1,94	1,16	1,56	0,88	1,75	0,94
Rituális	2,98	1,35	2,55	1,24	2,75	1,26	2,49	1,16	2,59	1,26
Szimbolikus	3,31	1,23	2,56	1,26	3,04	1,28	2,36	1,25	2,51	1,21
Empirikus	3,66	1,17	3,16	1,19	3,45	1,10	3,24	1,16	3,28	1,16
Deduktív	4,18	1,11	4,56	0,84	4,29	0,96	4,63	0,74	4,27	1,03
„A háromszög belső szögeinek összege 180^o”										
Bizonyítás-típus	*Évfolyam*									
	7.		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s
Tekintélyelvű	2,23	1,33	1,26	0,74	1,59	1,10	1,32	0,85	1,50	1,06
Rituális	3,56	1,32	2,02	1,05	2,46	1,13	1,83	0,96	2,17	1,14
Szimbolikus	3,12	1,10	2,96	1,22	3,26	1,13	2,78	1,15	3,06	1,15
Empirikus	4,05	1,19	3,27	1,15	3,13	1,22	2,22	1,01	2,72	1,22
Deduktív	4,01	1,05	4,77	0,62	4,23	1,05	4,77	0,72	4,38	0,95
„Három páratlan szám szorzata mindig páratlan”										
Bizonyítás-típus	*Évfolyam*									
	7.		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s
Tekintélyelvű	2,82	1,43	1,57	1,03	2,08	1,18	1,57	0,96	1,96	1,17
Rituális	3,56	1,16	2,78	1,17	3,07	1,13	2,70	1,15	2,83	1,12
Szimbolikus	3,12	1,30	3,20	1,39	3,13	1,22	3,58	1,40	3,03	1,38
Empirikus	4,05	1,09	2,81	1,25	3,46	1,13	2,64	1,12	3,15	1,17
Deduktív	4,01	1,02	4,11	1,13	3,90	1,16	4,08	1,16	3,75	1,18
„Az olyan számok, amelyek 9362... számjegyekkel kezdődnek, és utána csupa 0 áll, nem oszthatók 3-mal”										
Bizonyítás-típus	*Évfolyam*									
	7.		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s	Átl.	s
Tekintélyelvű	1,96	1,26	1,25	0,62	1,56	0,99	1,25	0,70	1,51	0,90
Rituális	3,15	1,14	2,20	1,12	2,46	1,11	2,11	1,04	2,23	1,12
Szimbolikus	3,15	1,16	2,66	1,22	2,67	1,18	2,45	1,17	2,57	1,15
Empirikus	3,20	1,25	2,35	1,09	2,45	1,23	2,21	1,08	2,50	1,19
Deduktív	4,05	1,20	4,08	1,39	3,90	1,35	3,97	1,35	3,79	1,44

Megjegyzés: A mintaelemszámok, amelyekből az adatokat számítottuk, az egyes évfolyamokon a következőképpen alakultak: *7. osztály:* 314–321 fő, *9. gimn.:* 337–342 fő, *9. szki.:* 259–263 fő, *11. gimn.:* 336–340 fő, *11. szki.:* 266–269 fő.

Rövidítések: gimn. = gimnázium, szki. = szakközépiskola, Átl. = Likert-skálán mért átlag, s = szórás

Az alacsonyabb életkorral együtt járó értékelési bizonytalansággal kapcsolatban azt a kérdést érdemes megfontolni, hogy vajon milyen empirikus mutató jellemezheti ezt a bizonytalanságot. Ha ugyanis tényleg arról lenne szó, hogy a hetedikesek nem olyan következetesek az osztályozásban, mint felsőbb évfolyamos társaik, akkor ennek a nagyobb szórásértékekben kellene megnyilvánulnia. A bizonytalanságot – ezzel szemben – az is jelezheti, hogy a hetedikesek kevesebb egyes és ötös osztályzatot adnak, a véleményük kevésbé polarizált, ez pedig alacsonyabb szórásértékekkel jár együtt. Az adatok azt az elképzelést támasztják alá, hogy a legtöbb bizonyítás-értékelésénél a hetedikesek szórásmutatója nagyobb. Említettük ugyanakkor korábban, hogy a hetedikesek populációja heterogénebb a középiskolás populációknál, így nem tudható, hogy a magasabb szórás mögött kialakulatlanabb értékítélet, bizonytalanabb osztályozás vagy a populáció heterogenitása áll. Véleményünk szerint mindhárom tényezőnek szerepe van a magasabb szórásértékek kialakulásában.

A táblázat adatai alapján levonható következtetéseket két csoportra bontjuk: először az egyes bizonyítástípusok adatainak feladatok és idősor szerinti elemzését végezzük el, majd az egyes évfolyamok eredményeit vizsgáljuk. A két szempont egymásra vetítésével megfogalmazunk majd olyan észrevételeket is, amelyeket későbbi vizsgálatok igazolhatnak.

A tekintélyelvű bizonyítások

A 3. táblázat a 2. táblázat sorainak kivonatolásával készült, és csak a tekintélyelvű bizonyításokra vonatkozó adatokat tartalmazza. Nyilvánvaló az adatokból, hogy – bár igyekeztünk tartalmi szempontból változatos tekintélyelvű bizonyításokat szerkeszteni – a tanulók következetesen alacsony pontszámokat adtak azokra. A két utolsó feladat tekintélyelvű bizonyításai közötti különbség eléggé jelentősnek tűnik. Ennek oka az lehet, hogy a „3 páratlan szám szorzata páratlan” feladatban a tekintélyelvű bizonyítás már-már empirikusnak tekinthető, hiszen konkrétan utal arra, hogy néhány esetet meg kellene vizsgálni az állítás igazságának igazolása céljából.

Az elvégzett páros t-próbák kevés kivétellel szignifikáns különbséget jeleztek adott évfolyamon belül a különböző tartalmú bizonyítások átlagértékei között. Ilyen mintaelemszám esetén nagyjából 0,15 századnyi különbség már 95%-os szinten szignifikáns. A tartalom szerint meglévő szignifikáns különbségeket kétféleképpen lehet interpretálni: (1) A tartalomnak meghatározó szerepe van abban, hogy a tanulók mennyire értékesnek ítélik a tekintélyelvi érvelést. (2) A tesztkészítő – legjobb igyekezete ellenére – egyszer „tekintélyibb”, másszor kevésbé „tekintélyi” bizonyításokat szerkesztett. Az adatok és a konkrét opciók ismeretében azt mondhatjuk, mindkét tényező szerepe elvitathatatlan. Az első esetben a különbséget az magyarázza, hogy az iskolai törzsanyaghoz képest újszerű, szokatlan állítások esetében elfogadottabb a tekintélyi érvelés, míg a másik tényező hatását az magyarázza, hogy esetenként más bizonyítássémák elemei is beépülhettek a tekintélyelvű bizonyításokba, és ez által azok értékesebbé váltak. A két hatótényező közötti jelentős különbség abban áll, hogy míg a tesztkészítő tevékenységében fellelhető hibák mindig konkrét feladatokhoz, opciókhoz köthetők, addig a tartalom ismertsége és a tekintélyelvű érvelés értékessége közötti összefüggés tartalmak széles körében érvényes lehet.

Az évfolyamok, iskolatípusok szerinti különbségek világos tendenciákat rajzolnak ki. A tekintélyelvű bizonyítások a 7. osztályosok körében a leginkább elfogadottak, a gimnazisták esetében pedig alacsonyabb átlagokat találtunk, mint a szakközépiskolások között. A minták közötti átlagbeli különbségek matematikai statisztikai vizsgálatára szolgáló variancia-analízis a szórások különbözősége miatt nem végezhető el, de a Dunnett-féle post-hoc analízis szerint az imént vázolt tendenciát statisztikai szempontból releváns különbségek támasztják alá.

3. táblázat. A tekintélyelvű bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

Feladat	*Évfolyam*									
	7.		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*
„A 2 az egyetlen páros prím”	2,70	1,31	1,69	1,00	1,94	1,16	1,56	0,88	1,75	0,94
„A háromszög belső szögei”	2,23	1,33	1,26	0,74	1,59	1,10	1,32	0,85	1,50	1,06
„Három páratlan szám szorzata”	2,82	1,43	1,57	1,03	2,08	1,18	1,57	0,96	1,96	1,17
„3-mal oszthatóság”	1,96	1,26	1,25	0,62	1,56	0,99	1,25	0,70	1,51	0,90

Rövidítések: gimn = gimnázium, szki. = szakközépiskola, Átl. = Likert-skálán mért átlag, s = szórás

A rituális bizonyítások

Az előfelmérés során a rituális bizonyítások nyíltvégű kérdések esetén ritkán fordultak elő a tanulói válaszok között. A rituális bizonyítási stratégia a tekintélyelvi meghaladását jelenti abban az értelemben, hogy ebben már jelen van a formai megfelelőségre törekvés is. A rituális bizonyítást magasra értékelő személy általában azt értékeli, hogy a bizonyítás „szókincse”, szerkezete emlékeztet a deduktív bizonyításokéra. Valószínűsíthető, hogy sok esetben a tárgyi tudás hiánya akadályozza meg a tanulót abban, hogy a rituális bizonyításra alacsony pontszámot adjon. Feltételeztük ezért, hogy a rituális bizonyítások értékelése során nagy szerepe van a tartalom ismertségének.

A három páratlan szám szorzatával kapcsolatos feladat viszonylag magasabb átlaga ismét annak köszönhető, hogy a rituális bizonyításopcióban empirikus, sőt deduktív bizonyításokra jellemző elemek is helyet kaptak (konkrét eset vizsgálata, utalás teljes indukcióra). A tekintélyelvű bizonyításoknál megfigyelt másik jelenséget – az állítás ismertsége és a bizonyítástípus értékessége közötti összefüggés – nem tapasztaltuk a rituális bizonyításoknál.

4. táblázat. A rituális bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

Feladat	*Évfolyam*									
	7.		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*
„A 2 az egyetlen páros prím”	2,98	1,35	2,55	1,24	2,75	1,26	2,49	1,16	2,59	1,26
„A háromszög belső szögei”	3,14	1,32	2,02	1,05	2,46	1,13	1,83	0,96	2,17	1,14
„Három páratlan szám szorzata”	3,56	1,16	2,78	1,17	3,07	1,13	2,70	1,15	2,83	1,12
„3-mal oszt-hatóság”	3,15	1,14	2,20	1,12	2,46	1,11	2,11	1,04	2,23	1,12

Rövidítések: gimn = gimnázium, szki. = szakközépiskola, Átl. = Likert-skálán mért átlag, s = szórás

Az iskolai évfolyam és iskolatípus szerinti különbségekről ugyanazokat mondhatjuk el, mint a tekintélyelvű bizonyításokkal kapcsolatban: Leginkább az általános iskolások adtak magasabb osztályzatot, a szakközépiskolások már alacsonyabbakat, és a gimnazisták ítélték meg legszigorúbban ezeket a bizonyításokat. A gimnazista korosztályok közötti különbség csak a háromszöges feladatban szignifikáns, a két szakközépiskolai korosztály között viszont az első kivételével minden feladatban szignifikáns különbséget találtunk. Az öt vizsgált bizonyítástípus közül a deduktív mellett a rituális bizonyításokban volt a legkisebb különbség a gimnazisták és a szakközépiskolások között.

A szimbolikus bizonyítások

A bizonyítási képesség vizsgálatának egyik alapkérdése, hogy a bizonyítás-fogalom milyen mértékben kötődik a matematikához, a matematikai állításokhoz. A kötődés egyik mércéje lehet, hogy az értelmetlen szimbólum-manipuláció mennyire hasonló megítélés alá esik matematikai és nem-matematikai tartalmak esetén.

5. táblázat. A szimbolikus bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

Feladat	*Évfolyam*									
	7.		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*
„A 2 az egyetlen páros prím”	3,31	1,23	2,56	1,26	3,04	1,28	2,36	1,25	2,51	1,21
„A háromszög belső szögei”	3,67	1,10	2,96	1,22	3,26	1,13	2,78	1,15	3,06	1,15
„Három páratlan szám szorzata”	3,12	1,30	3,20	1,39	3,13	1,22	3,58	1,40	3,03	1,38
„3-mal oszt hatóság”	3,15	1,16	2,66	1,22	2,67	1,18	2,45	1,17	2,57	1,15

Rövidítések: gimn = gimnázium, szki. = szakközépiskola, Átl. = Likert-skálán mért átlag, s = szórás

A szimbolikus bizonyítások tanulói értékelése során minden bizonnyal több szempont is érvényesült. Valószínűleg jelen volt a szimbólum-manipulációval mint általános matematikai bizonyítási stratégiával kapcsolatos tudás. Másrészt nyilvánvalóan szerepe volt a tárgyi tudásnak is, harmadsorban pedig ki kell emelnünk az affektív szféra különös fontosságát. A matematikai jelek világával szembeni ellenérzések, vagy éppen a matematikai levezetések figyelmes átnézésére való hajlandóság mind-mind meghatározhatták, hogy végül milyen osztályzatot adott a tanuló a szimbolikus bizonyításra. A „3 páratlan szám szorzata" feladatban különösen nehéz volt észrevenni, hogy a formális számítások eredményeként adódó algebrai kifejezésből levont következtetés nem korrekt. A többi feladatnál az előző két externális bizonyítástípushoz hasonló tendenciákat fedezhetünk fel a számsorokban. Nyilvánvaló különbség ugyanakkor, hogy a tekintélyelvű és rituális bizonyításokhoz képest az átlagok a legtöbb esetben magasabbak Mivel mindhárom externális bizonyítástípusra matematikai szempontból az jellemző, hogy nem visz közelebb az állítás nyilvánvalóvá tételéhez, a szimbolikus bizonyítások fölényét annak tulajdonítjuk, hogy matematikai kontextusban a matematikai jelek megjelenése a tanulók számára értékesebbé teszi azt.

Az empirikus bizonyítások

6. táblázat. Az empirikus bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

Feladat	*Évfolyam*									
	7.		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*
„A 2 az egyetlen páros prím"	3,66	1,17	3,16	1,19	3,45	1,10	3,24	1,16	3,28	1,16
„A háromszög belső szögei"	3,87	1,19	3,27	1,15	3,13	1,22	2,22	1,01	2,72	1,22
„Három páratlan szám szorzata"	4,05	1,09	2,81	1,25	3,46	1,13	2,64	1,12	3,15	1,17
„3-mal oszthatóság"	3,20	1,25	2,35	1,09	2,45	1,23	2,21	1,08	2,50	1,19

Rövidítések: gimn = gimnázium, szki. = szakközépiskola, Átl. = Likert-skálán mért átlag, s = szórás

A legváltozatosabb tanulói véleményeket az empirikus bizonyításokkal kapcsolatban találtuk. Korábban már említettük, hogy az empirikus bizonyítások szempontjából jelentős különbség van az univerzális kvantort tartalmazó és azt nem tartalmazó állítások között. Ugyancsak különbség adódhat a *balacheff*-i értelemben különböző empirikus bizonyítások megítélése között. Az empirikus szint *Harel* és *Sowder* rendszerében is több alszintre tagolódik, de sok típus geometriai tartalmakhoz kötődik. Éppen ezért az empirikus bizonyításoknál nem várhattuk a átlagok megegyezését különböző tartalmak esetén.

A deduktív bizonyítások

Valószínűleg nagyon sok tanuló esetében a bizonyítások értékelésének stratégiája magában foglalta a legjobb bizonyítás megkeresésének fázisát. A deduktív bizonyítások fölismeréséhez ugyanakkor – legnagyobbrészt a rituális és szimbolikus bizonyítások jelenléte miatt – szükség volt az adott témakörhöz kapcsolódó ismeret jellegű tudáselemekre is.

Ami a deduktív bizonyítások értékelésével kapcsolatban szembetűnő, az a két utolsó feladatra adott szignifikánsan alacsonyabb átlagok, amely a hetedikesek kivételével minden populációban jellemző volt. A páratlan számok szorzatára vonatkozó állítás esetében magyarázatot jelent, hogy a szimbolikus bizonyítások ennél a feladatnál jelentősen magasabb osztályzatokat kaptak, és a már említett legjobb választ kereső stratégia miatt sok tanulónál a deduktív bizonyítás a második helyre került.

7. táblázat. A deduktív bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

Feladat	*Évfolyam*									
	7.		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*
„A 2 az egyetlen páros prím”	4,18	1,11	4,56	0,84	4,29	0,96	4,63	0,74	4,27	1,03
„A háromszög belső szögei”	4,07	1,05	4,77	0,62	4,23	1,05	4,77	0,72	4,38	0,95
„Három páratlan szám szorzata”	4,01	1,02	4,11	1,13	3,90	1,16	4,08	1,16	3,75	1,18
„3-mal oszthatóság”	4,05	1,20	4,08	1,39	3,90	1,35	3,97	1,35	3,79	1,44

Rövidítések: gimn = gimnázium, szki. = szakközépiskola, Átl. = Likert-skálán mért átlag, s = szórás

Évfolyamok, iskolatípusok szerinti különbségek

A matematikai bizonyítási teszt egyik figyelemre méltó, ám korántsem váratlan eredménye, hogy következetesen megnyilvánuló különbségek vannak az egyes évfolyamok, valamint a középiskolások körében a gimnazisták és a szakközépiskolások között. Nincs elegendő információnk ahhoz, hogy megmondjuk, a különbségekből mennyi vezethető vissza az egyéni fejlődési mutatók összegének különbségére, és mennyi az iskolarendszerben megvalósuló szelekcióra. Egy másik probléma, ami miatt nem beszéltünk eddig fejlődésről, a mérőeszköz sajátosságaiban keresendő. Nyilvánvaló, hogy önmagukban a bizonyítási sémákra adott osztályzatok nem fejeznek ki fejlettséget. A fejlettség normaorientált értékelésére egy mutatószámot fejlesztettünk ki a Likert-skálás adatokból (*Csíkos*, 2000).

Ha az eddig bemutatott adatok alapján kvalitatív jellemzést szeretnénk adni arról, hogy az egyes évfolyamokon és iskolatípusokban hogyan értékelik a tanulók a különböző matematikai bizonyításokat, a következő megállapításokat tehetjük:

– A hetedik osztályosokra a középiskolásoknál nagyobb mértékben jellemző az externális bizonyítástípusok (tekintélyelvű, rituális, szimbolikus) túlértékelése.
– A kilencedikes és tizenegyedikes középiskolások körében a rituális és deduktív bizonyítások esetében kisebb, a tekintélyelvű bizonyítások esetében nagyobb, de a különböző állításoknál következetesen megnyilvánuló különbségek vannak. Az empirikus és szimbolikus bizonyítások megítélése különbségének előjele a tartalommal együtt változhat.
– Az átlagokat tekintve a szakközépiskolások a hetedikes általános iskolások és a gimnazisták között helyezkednek el.

A „Gondolkodtató feladatok”-ban nyújtott tanulói teljesítmények jellemzése

A „Gondolkodtató feladatok” meglehetősen heterogén teszt, amely inkább szubtesztek halmazának tekinthető. Az első két feladat alapvető empirikus jellemzőit a „Bizonyítási feladatok” teszthez hasonló módon közöljük.

8. táblázat. A „Gondolkodtató feladatok” teszt első két feladatán tapasztalt válaszok átlaga és szórása

„A Föld gömbölyű”												
Bizonyítás-típus	*Évfolyam*											
	5.		*7.*		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*
Tekintélyelvű	3,28	1,09	2,46	1,32	1,47	0,85	1,87	1,08	1,45	0,83	1,81	1,04
Rituális	2,45	1,23	2,09	1,04	1,56	0,88	1,70	0,86	1,37	0,61	1,69	0,84
Szimbolikus	3,20	1,20	2,86	1,21	2,43	1,18	2,48	1,13	2,32	1,19	2,76	1,26
Empirikus	3,68	1,21	3,63	1,11	3,11	1,15	3,22	1,21	2,96	1,22	3,14	1,22
Deduktív	4,03	1,13	4,16	0,96	4,22	1,05	4,29	0,95	3,90	1,15	3,84	1,12
„Nem ég a városháza”												
Bizonyítás-típus	*Évfolyam*											
	5.		*7.*		*9. gimn.*		*9. szki.*		*11. gimn.*		*11. szki.*	
	Átl.	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*	*Átl.*	*s*
Tekintélyelvű	3,53	1,46	2,98	1,49	1,78	1,11	2,37	1,38	1,66	1,03	2,17	1,28
Rituális	3,89	1,23	3,38	1,27	2,54	1,32	3,11	1,26	2,32	1,27	3,06	1,30
Szimbolikus	3,60	1,20	3,46	1,22	3,03	1,26	3,25	1,30	2,75	1,22	2,95	1,22
Empirikus	3,08	1,18	2,80	1,05	2,41	1,15	2,52	0,99	2,44	1,14	2,47	1,16
Deduktív	3,89	1,07	4,01	1,05	4,34	0,96	3,92	1,17	4,39	1,03	3,88	1,16

Rövidítések: gimn = gimnázium, szki. = szakközépiskola, Átl. = Likert-skálán mért átlag, s = szórás

A „Gondolkodtató feladatok” tesztjében az első két feladat formailag teljesen azonos volt a matematikai bizonyítási feladatokkal. Tartalmi szempontból az első feladat természettudományi - vagy akár hétköznapi - jellegűnek számított. A második feladat eredetileg egy logikai feladvány volt (a forrást *Pólos* és *Ruzsa* (1987) jelentette), de többen nem ismerték fel a matematikai jelleget. A táblázat adataiból megállapítható, hogy a logikai feladat bizonyításait a középiskolások teljesen hasonlóan értékelték, mint a matematikai bizonyítási feladatokat. Az általános iskolások esetében ugyanakkor a deduktív bizonyításokra adott alacsonyabb pontszámok, valamint a rituális és szimbolikus bizonyítások túlértékelése jellemző. *A szimbolikus bizonyítások túlértékelése azért szembetűnő, mert a feladat szövege alapján nem volt várható, matematikában szokásos szimbólumok megjelenése*. Amikor azonban szembetalálták magukat ezzel a lehetséges opcióval, magas pontszámmal értékelték.

Mivel a matematikai bizonyítási teszt nem szerepelt ötödik osztályban, ezért a főbb bizonyítási sémák megítélésének az általános iskolai szakaszra eső változását e két feladat segítségével vizsgálhatjuk. Az ötödikesek és a hetedikesek átlagait összehasonlítva azt találtuk, hogy a deduktív bizonyítások megítélése nem különbözik jelentősen ($p=0,60$ ill. $p=0,10$ valószínűség mellett). Jelentős különbség van ugyanakkor mindkét esetben a tekintélyelvű és a rituális bizonyítások megítélésében ($p<0,01$, mindkét esetben). A rituális bizonyítások megítélése - mint korábban említettük - jelentős mértékben függhet a témakörben megszerzett ismeret jellegű tudáselemektől. A tekintélyelvű bizonyítások megítélése ezzel szemben nagyobb mértékben egy bizonyítási-érvelési stratégia megítélését jelentheti, és nem ismeretek meglétének vagy hiányának értékelését.

Összegzés

Tanulmányunkban az állítások igazolásával kapcsolatos gondolkodási folyamatok értékelését és ezen keresztül a fejlődési tendenciák feltérképezését tűztük ki célul. A bizonyítási képességnek egy fontos részterületét választottuk elemzésünk tárgyául: Iskoláskorú tanulóink hogyan értékelnek adott állításokhoz tartozó különböző bizonyításokat. A feladatokban szereplő bizonyítás-típusok meghatározása különböző tudományterületek bizonyítás-fogalmainak elemzése alapján legnagyobb részben *Harel* és *Sowder* (1998) művére épült. A vizsgált öt bizonyítástípus (tekintélyelvű, rituális, szimbolikus, empirikus és analitikus) alkalmazása lehetővé tette a bizonyításokkal kapcsolatos gondolkodási folyamatok értékelését. A fejlődési tendenciák megállapítása céljából négy évfolyamot (5., 7., 9. és 11.) felölelő keresztmetszeti vizsgálatot végeztünk csaknem kétezer tanuló bevonásával. A felhasznált mérőeszközök kifejlesztése során egy korábbi előfelmérés adataira támaszkodtunk. A kapott eredmények megerősítik hipotézisünket, miszerint létezik egy lényegében tartalom-független képességrendszerünk, amely a gondolkodás különböző szintű komponenseit tartalmazza, és amelynek felhasználásával lehetővé válik különböző bizonyítási, érvelési típusok értékének megállapítása.

Az iskolai tanítás-tanulás gyakorlata számára kutatásunk fontosabb eredményei:

1) 5. osztályban a tanulók még sokszor elfogadják a tekintélyre hivatkozást bizonyításként, de az ilyen tanulók aránya 7. osztályra jelentősen csökken.
2) Az értelem nélküli szimbólum-manipuláció valamennyi évfolyamon túlértékelt. A matematikai bizonyításokkal még nem találkozott 5. osztályosok nem-matematikai

tartalom esetén jelentősen magasabb értékeket adtak a matematikai jeleket értelmetlen módon fölhasználó érvelésre.

3) A példákkal alátámasztás, amely az empirikus bizonyítások egyik gyakori formája, relatíve alulértékelt. Hangsúlyozni kell, hogy csak akkor van értelme deduktív formális bizonyításokat tanulni és tanítani, ha szem előtt tartjuk az átjárhatóság (ld. *Nagy*, 1985) kritériumát. Sok esetben fontosabb ismerni a csodálatos 3, 4, és 5 cm-es oldalakból álló derékszögű háromszöget, mint Pitagorasz tételét.

Irodalom

Almeida, D. (1995): Mathematics undergraduates'perceptions of proof. *Teaching Mathematics and its* Applications, 14, 171–177.

Ambrus András (1993): Indirekt argumentációk, indoklások, bizonyítások az iskolai matematikaoktatásban. *Matematikatanár-képzés – matematikatanár-továbbképzés* **1.**, 29–40.

Aquinói Szent Tamás (1994): *Summa Theologiae. Prima pars – A teológia foglalata. Első rész*. Telosz Kiadó, Budapest.

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: Pimm, D. (szerk.): *Mathematics, teachers, and children*, Hodder and Stoughton, London, 216–235.

Barwise, J. (1977, szerk.): *Handbook of mathematical logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford.

Borwein, J., Borwein, P, Girgensohn, R. és Parnes, S. (1996): Making sense of experimental mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, **18**, 12–18.

Chazan, D. (1993): High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics,* **24**, 359–387.

Csapó Benő, Cs. Czachesz Erzsébet és Vidákovich Tibor (1987): A nyelvi-logikai műveletrendszer fejlettsége 14 éves korban. *Pszichológia,***7**. 521–544.

Csibra Gergely, Gergely György és Nádasdy Zoltán (2000): Az oksági gondolkodás perceptuális alapjai. In: Pléh Csaba, Kampis György és Csányi Vilmos (szerk*.): A megismeréskutatás útjai*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 52–74.

Csíkos, C. A. (1999): Measuring students' proving ability by means of Harel and Sowder's proof-categorization. In: Zaslavsky, O. (szerk.): *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, Haifa, Israel, vol. 2, 233–240.

Csíkos Csaba (2000*): A bizonyítási képesség értelmezése és fejlődésének jellemzői iskoláskorban.* PhD értekezés. Szegedi Tudományegyetem, Pedagógiai Tanszék.

Descartes, R. (1637/1992): *Értekezés a módszerről.* IKON Kiadó.

Dreyfus, T. és Eisenberg, T. (1998): A matematikai gondolkodás különböző oldalairól. In: Stenberg és Ben-Zeev (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*, Vince Kiadó, Budapest,

Flavell, J. H. (1987): Speculations about the nature and development of metacognition. In: Weinert, F. E. és Kluwe, R. (szerk.): *Metacognition, motivation, and understanding*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, 21–29.

Földesi Tamás (1978): *A marxista filozófia bizonyításelméletének alapjai*. Kossuth Könyvkiadó, Budapest.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics,* **9**. 20–23.

Hanna, G. (1996): The ongoing value of proof. In: *Proceedings of the 21th PME Conference*, Valencia, Spain, vol. 1, 21–34.

Hanna, G. és Jahnke, H. N. (1993): Proof and application. *Educational Studies in Mathematics,* **24**. 421–438.

Harel, G. és Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Research from exploratory studies. In: Dubinsky, E., Schoenfeld, A.és Kaput, J. (Eds.): *Research Issues in Collegiate Mathematics Education* Vol. 7., American Mathematical Society, Washington, D. C., 234–283.

Hersh, R. (1993): Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 389–399.

Horváth György (1990): *Az intelligencia mérése*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Horváth György (1993): *Bevezetés a tesztelméletbe. A tesztszerkesztés és -értékelés alapjai*. Keraban Könyvkiadó, Budapest.

Johnson-Laird, P. N. és Byrne, R. M. J. (1991): *Deduction*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, Hove and London.

Katona Géza (1990): *Valós vagy valótlan?* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Lakatos Imre (1976/1981): *Bizonyítások és cáfolatok*. Gondolat, Budapest.

Lawrence, J. A. (1991): Informal reasoning and the judicial system. In: Voss, J. F., Perkins, D. N. és Segal, J. W. (szerk.): *Informal reasoning and education*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London.

Mariotti, M. A. (1998): Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della Matematikca e delle Scienze integrate*, 21, 209–252.

Markel, W. D. (1994): The role of proof in mathematics education. *School Science and Mathematics,* **94**. 291–295.

Moshman, D. (1990): The development of metalogical understanding. In: Overton, W. F. (szerk.): *Reasoning, necessity, and logic: Developmental perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 205–225.

Nagy József (1975): A témazáró tesztek reliabilitása és validitása. *Acta Universitatis Szegediensis de A. J. Nominatae, Sectio Paedagogica et Psychologia, Series Specifica*, Szeged.

Nagy József (2000): XXI. század és nevelés. Osiris Kiadó, Budapest.

Pólos László és Ruzsa Imre (1987): A logika elemei. Tankönyvkiadó, Budapest.

Pólya György (1957): *A gondolkodás iskolája*. Bibliotheca, Budapest.

Pólya György (1988): *Indukció és analógia*. Gondolat, Budapest.

Popper, K. R. (1997): *A tudományos kutatás logikája*. Európa Kiadó, Budapest.

Rips, L. J. (1983): Cognitive processes in propositional reasoning. *Psychological Review,* **90**. 38–71.

Rips, L. J. (1994): *The psychology of proof: Deductive reasonig in human thinking*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts - London.

Ruzsa Imre és Urbán János (1966): *A matematika néhány filozófiai problémájáról*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Schlick, M. (1972): Pozitivizmus és realizmus. In: Altrichter Ferenc (szerk.): *A Bécsi Kör filozófiája*. Gondolat Kiadó, Budapest, 93–133.

Schütte, K. (1977): *Proof theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Smullyan, R. (1978/1988): *Mi a címe ennek a könyvnek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Szabó, Á. (1978): *The beginnings of Greek mathematics*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Tarski, A. (1990): *Bizonyítás és igazság*. Gondolat, Budapest.

Tirosh, C. (1999): *Universal theorems: A paradigmatic model of mathematical theorems*. Paper presented at the 23th Conference of PME, Haifa, Israel.

Trosztnyikov, V. N. (1981): *Konstruktív módszerek a matematikában*. Gondolat, Budapest.

Tymoczko, T. (1986): Making room for mathematicians in the philosophy of mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, **8**. 44–50.

van der Waerden, B. L. (1977): *Egy tudomány ébredése*. Gondolat, Budapest.

Walsh, W. B. és Betz, N. E. (1990): *Tests and assessment*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

ABSTRACT

CSABA CSÍKOS: 10–17 YEAR-OLD STUDENTS' JUDGMENTS ON PROVING STRATEGIES

The focus of this study is the nature and development of reasoning processes (so-called proving ability) that allow for verifying logical statements. Students' judgments on different proofs of a given statement can be considered as important indicators of proving ability. In order to categorize different proof types, in this investigation proof concepts of philosophy, mathematics and jurisprudence are reviewed. Two tests of proving ability were administered to 1944 students from grades 5, 7, 9 and 11. The tests contained statements five different proofs that were categorized – based on Harel and Sowder's taxonomy – as authoritarian, ritual, symbolic, empirical and analytic. The proof types were constructed on the basis of a pilot study that set as an aim to let students allow writing many types of proofs to open-ended tasks. Students scored the different proofs on a five-point Likert-scale. From the aspect of educational practice, the main results of this study are: (1) Fifth-graders accept authoritarian arguments more often than older children do. (2) In each age group, meaningless symbol-manipulation is over-valued. Even in case of non-mathematical content there is a tendency to give higher scores to meaningless symbol-manipulations. (3) In each age group, empirical proofs are relatively under-valued. Since students' judgments can largely be traced back to math teachers' bias towards symbolic proofs, mathematics can play an important role in fostering the development of proving ability. Practical considerations about the results of the present investigation may involve emphasizing the importance of 'exploring the territory' before proving a statement. Developmental tendencies revealed by cross-sectional comparisons may be relevant for teacher educators and also for textbook writers and curriculum.

Magyar Pedagógia, **101**. Number 3. 379–345. (2001)

Levelezési cím / Address for correspondence: Csíkos Csaba, Szegedi Tudományegyetem Pedagógiai Tanszék, H–6722 Szeged, Petőfi S. sgt. 30–34.